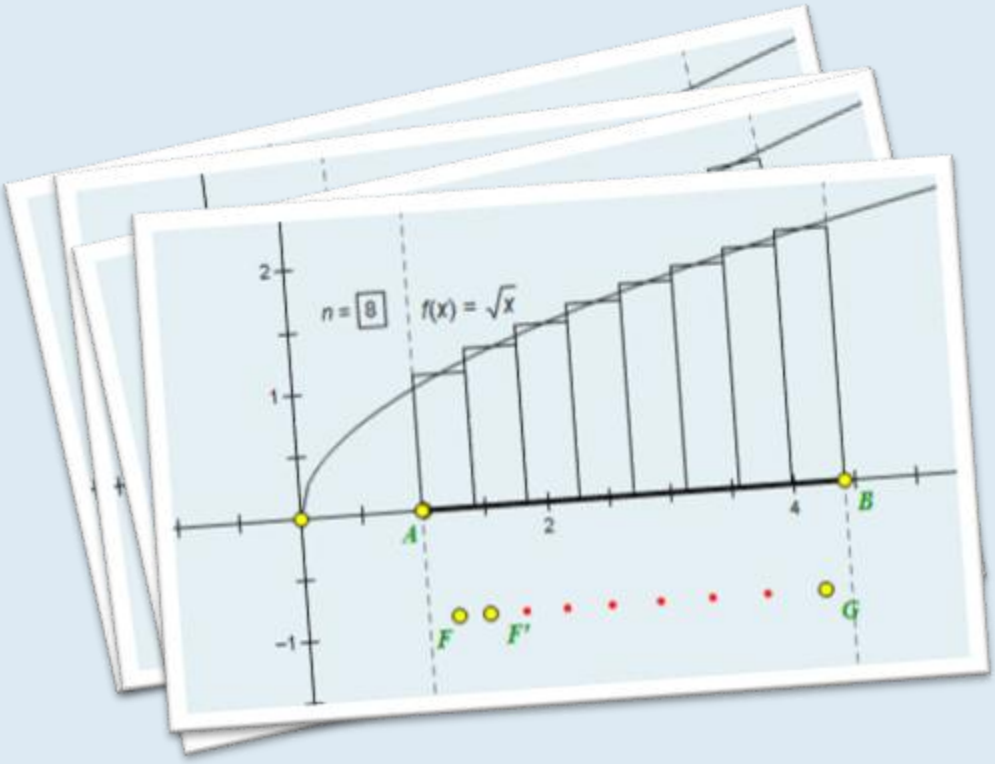
几何画板之

由浅入深说迭代

◇ 贺基旭 编



几何画板★研究者&〓数学实验室〓 出品

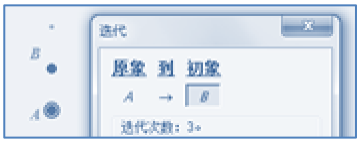
·2014 年 8 月 9 日·

目　录

第 1 章 几个说明

1、为方便板友线下打印为纸本（A4 版面）学习，本书采用双色制版。同时，为方便板友们在阅读时作一些必要的笔记，版面的留白相比《几何画板 由浅入深说迭代 v1》要多一些。

2、本书语言叙述方式如下：

本书语言叙述方式	表达意思
【变换➔迭代】	点击【变换】菜单，选择下拉菜单中【迭代】选项。
迭代	弹出的迭代窗口。
迭代|初象	在弹出的迭代窗口中，找到初象下方的方框。
结构➔添加新的映射	（在弹出的迭代窗口中）点击结构按钮，选择其下拉菜单中的添加新的映射。
迭代	（在弹出的迭代窗口中）按迭代按钮。 
按 Shift 键	在电脑键盘上按住 Shift 键。
A→B	 此时点击点 B，得到  。
(A,B)→$(E,F),(C,D),(A,B)$	 ，$(E,F),(C,D),(A,B)$
隐藏点 A，点 B，…	选择点 A，点 B，…，点击【编辑➔操作类按钮➔隐藏/显示】。
选择（或将或隐藏）四边形 ABCD	选择（或将或隐藏）四边形 ABCD 的内部。
选择点 A，点 B	顺次选择点 A，点 B。本书不作特别说明，选择就是指顺次选择。
点 C 沿标记向量 A|B 平移得点 D	顺次选择点 A，点 B，点击【变换➔标记向量】，选择点 C，点击【变换➔平移】，在弹出的平移窗口中，按平移按钮，得点 D。

本书语言叙述方式	表达意思
点 A 沿极坐标（1 厘米，90° ）平移得点 B	选择点 A，点击【变换→平移】，在弹出的平移窗口中，选择平移变换：极坐标，以：固定距离 1 厘米，以：固定角度 90° 平移。按平移按钮。得到点 B。
点 A 沿直角坐标（1 厘米，1 厘米）平移得点 B	选择点 A，点击【变换→平移】，在弹出的平移窗口中，选择平移变换：直角坐标，水平方向：固定距离 1 厘米，垂直方向：固定距离 1 厘米平移。按平移按钮。得到点 B。
点 A 关于 x 轴反射，得点 B	双击 x 轴，选择点 A，点击【变换→反射】，得点 B
以点 A 为中心，点 B 旋转 60° ，得点 B'。	双击点 A（标记中心），选择点 B，点击【变换→旋转】，旋转|固定角度：60度，按旋转按钮。
以点 A 为中心，点 B 旋转 β，得点 B'。	选择单位为度或弧度的度量值 β，点击【变换→标记角度】。双击点 A（标记中心），选择点 B，点击【变换→旋转】，旋转|标记角度：β，按旋转按钮。
以点 A 为中心，点 B 缩放 λ，得点 B'。	选择无单位的度量值 λ，点击【变换→标记比值】。双击点 A（标记中心），选择点 B，点击【变换→缩放】，旋转|标记角度：λ，按缩放按钮。
合并点 A 到点 B	顺次选择点 A，点 B，点击【编辑→合并点】。
连接 AB	顺次选择点 A，点 B，点击【构造→线段】。
作射线 AB	顺次选择点 A，点 B，点击【构造→射线】。
作直线 AB	顺次选择点 A，点 B，点击【构造→直线】。
在线段 AB 上取点 C	选择线段 AB，点击【构造→线段的点】，得点 C。
在射线 AB 上取点 C	选择射线 AB，点击【构造→射线的点】，得点 C。
在直线 AB 上取点 C	选择直线 AB，点击【构造→直线的点】，得点 C。
初始化	自定义操作类按钮。
【数据→新建计算】 $x=\frac{360°}{n}$	点击【数据】菜单，选择下拉菜单中【新建计算】，在新建计算对话框中输入 3 6 0，点击单位→度，输入÷，如图 此时点击 n=5。按确定键。并将其标签改为 x，如下图。

本书语言叙述方式	表达意思
	

3、几何画板中常用的部分快捷键方式

快捷键	简单描述
Ctrl+A	选择绘图区内的所有非隐藏对象；
	在工具箱中画点(线、圆)工具处于被选定状态下选择绘图区内所有非隐藏点(线、圆)。
Ctrl+C	复制。
Ctrl+E	编辑当前选中的单个函数表达式或参数。
Ctrl+F	打开函数编辑器，编辑函数表达式确定后不画出函数图象。
Ctrl+G	绘制当前选中的函数的图象；
	打开函数编辑器，编辑函数表达式，按$\boxed{\text{确定}}$按钮后，在平面直角坐标系中画出函数的图象。
Ctrl+H	隐藏被选择的对象。
Ctrl+K	显示或隐藏被选对象的标签。
Ctrl+L	选择两点，则构造连接两点的有向线段；
	选择三个或三个以上的点，则顺次构造线段，形成“无芯有边框”多边形。
Ctrl+M	构造所选择的一条或多条线段的中点。
Ctrl+N	新建几何画板窗口。
Ctrl+O	打开一个已经存在的画板文件。
Ctrl+P	构造图形内部，颜色随机变换。用此不能构造弓形的内部。
Ctrl+Q	退出几何画板软件。若编辑过画板文件，则退出时会弹出保存对话框。
Ctrl+R	恢复所做的撤消。
Ctrl+S	保存当前画板窗口。
Ctrl+T	设置或取消所选的点、线、圆等对象的追踪状态。
Ctrl+V	粘贴剪切板存储的对象。若剪切板存储的对象为非图象格式，粘贴时均粘贴为重文本格式。
Ctrl+W	关闭当前画板窗口。
Ctrl+X	把选择的对象剪切到剪切板上。剪切时，连带父对象。
Ctrl+Z	取消刚刚绘制或修改的内容，复原到前次工作状态，并可以一步一步复原到初始

快捷键	简单描述
	状态（空白画板，或者本次打开画板的状态）。但是不会对点和线的线型、标签的修改进行记录。
Alt+↑	选择当前所选择的对象的父对象。父对象隐藏时，该功能失效。
Alt+↓	选择当前所选择的对象的子对象。子对象隐藏时，该功能失效。
Alt+?	打开对象的属性对话框。
Alt+>	使选中的文本字号变大。文本的迭代象除外。
Alt+<	是选中的文本字号变小。文本的迭代象除外。
Alt+`	启动所选图元（自定义控制按钮和文本除外）动画，弹出运动控制台窗口。
Alt+]	启动动画后加快动画速度。
Alt+[	启动动画后减慢动画速度。
Alt+D+S	停止动画对象的运动。
Alt+=	打开新建计算窗口。
Shift+Ctrl+D	打开文档选项，进行页面编辑和工具的创建。
Shift+Ctrl+E	擦除由追踪对象所产生的踪迹。
Shift+Ctrl+F	将选中的点标记为中心。
Shift+Ctrl+H	显示所有隐藏的对象。
Shift+Ctrl+I	构造对象的交点。
Shift+Ctrl+T	显示文本工具栏。
Shift+Ctrl+P	打开新建参数窗口。
Shift+Enter	所选文本框和自定义按钮，按选择顺序“列”对齐。
Esc	释放鼠标左键。

4、本书的读者为迭代的初学者，想研究高深的分形几何的板友请绕行，但所选例子中有不少分形几何图形。

5、本书案例均用几何画板 5.06 制作完成的。书籍的排版在 Office Word 2013 中完成，将 Word 文档转为 PDF 文本（固态文本）后，利用 Adobe Acrobat Pro 软件作页码修正和分节控制。为取得更好的阅读效果，建议板友使用 Adobe Reader 软件阅读，并安装以下字体：

方正宋一_GBK，**方正毡笔黑简体**，**方正粗圆_GBK**，方正楷体_GBK，**方正黑体_GBK**，方正古隶_GBK，方正汉简简体，**方正平和_GBK**，Cambria Math。

6、阅读本书前请细读《几何画板使用手册》第 15 章的相关内容。阅读本书时，尽量边读边操作，理解作图的每个步骤。

7、本书的所有选例均不是笔者原创，但一定是笔者亲手制作过的。很多选例留有很大的优化空间，供板友优化。几何画板的学习过程就是“先实现，再优化”的循环过程。不要嫌麻烦，多找对象父子关系，

多练习，在明白算理的情况下，考虑自己的解决方案。安装几何画板时随机所带的画板作品是最好的学习教材。

8、本书署名为《几何画板 由浅入深说迭代》，选录谢辅炬《几何画板迭代全解》中的部分实例。大部迭代案例大部分来自 QQ 群 = 数学实验室 =（48415029）、几何画板★研究者（11521676）。在书籍的编写过程中，我离不开方小庆老师的指导。书籍的样式设计、案例的描述方式等等问题都在方小庆老师的启发下完成样式定义和编写。可以这样说，我所书写的文字只要有问题，就一定逃不过方总的眼睛。喜欢 3D 几何的板友记得加入 inRm3D 交流群（170568550）。只要你在使用几何画板或 inRm3D 时遇到困难，上述的三个群的群友都会在第一时间内帮您解决掉您的问题。

唐家军老师对原书（《几何画板迭代全解》）进行了修订。并且重新制作《几何画板 由浅入深说迭代》一书的想法也是唐老师提出来的。我学习的几何画板的教程就是唐老师编写的《几何画板使用手册》。这本书相当接地气，用板友的话说是“只要阅读《几何画板使用手册》，即使是小学生，也照样能学得通”。和唐老师交流更有这样的感觉，只要你有问题，他都会耐心的指导，直到你会为止。

感谢邓立中、方小庆、方益初、高峻清、何万程、侯仰顺、刘华方、钮炳坤、潘建平、唐家军、余清海、臧闾运、周维波等老师所提供的迭代实例或技术支持。感谢所有人，特别是那些在上述三个群里提问问题的每一位板友。正是你们的提问，使我对画板有了进一步的认识。

第 2 章 什么是迭代

第 1 节 迭代的概念

图 1

迭代是一种计算机算法。简而言之，即

1、将 x=a 代入 f(x)，得，b=f(a)。

2、令 x=b 代入 f(x)，得，c=f(b)，令 c=b。

3、重复步骤 2。

这里的 a 称为原象（原象只能是自由点、半自由点和没有父对象的参数），b 称为初象，由 a 指向 b 称为迭代规则，重复次数称为迭代次数（又称为迭代深度），迭代后所产生的图形称为迭代象，最末位的迭代象称为迭代象的终点。

用钮炳坤老师的话说迭代便是：“迭代的前提是原象和初象，初象是根据迭代规则原象变换得到的子对象，所谓迭代就是用前一个初象替代原象在相同规则下产生一个新的子对象。”

例 1 等差数列㈠

等差数列1，3，5，7，…

此例中，n=1 为原象，n+2=3 为初象，n 指向 n+2 为迭代规则，默认迭代次数为 3 次。如图 1。

第 2 节 迭代的注意事项

一、原象

1、原象可以选择一个点、多个点、一个点和多个参数，多个点和多个参数。原象可以合并到自由点、半自由点和定点上。原象的子对象（子对象为迭代象时除外）也将参与迭代。原象为参数时，该参数不能有父对象，但是，当迭代完成后，我们可以随意编辑该参数的定义。详见例 14 三角点阵。

二、迭代次数

2、用参数控制的迭代称为深度迭代，此参数可以是度量值、参数值、计算值，几何画板在调用它时会自动去其单位，并且取其整数部分（=trunc()）作为迭代次数。否则称为无参迭代。

三、显示和结构（如图 1）

3、在迭代窗口，显示按钮的下拉菜单中，共分为两大类：迭代（增加迭代，减少迭代），显示为（完整迭代（所有迭代），最终迭代）。括号内带方框的选项是为迭代时的默认选项。

4、在迭代窗口，结构按钮的下拉菜单中，共分为四大类：映射（添加新的映射、删除当前映射）、创建（所有对象的象，仅保留非点类象）、生成迭代数据表、移动对象上的点（到与初始对象上点相对类似的位置、到所在对象的随机位置）。

5、在迭代窗口，第一次点击结构➔添加新的映射后，原来的初象就会更名为映象 1，新添加的映射命名为映象 2。只有一个初象的迭代称为单映射迭代；否则称为多映射迭代。

四、迭代象

6、选择迭代象（文本除外），可以按数字键盘上的 ＋ 键或 － 键调整迭代次数。

7、迭代象的原象为点时可以对该迭代象构造终点（点击【变换➔终点】）；否则不能。迭代深度发生变化时，终点也会发生变化。这个迭代的“终点”是一个实体点，可以进行选定、修饰、度量和变换等操作。

8、选择迭代象，点击【编辑➔属性】，在弹出的迭代象窗口中，可以对其属性进行以下修改：

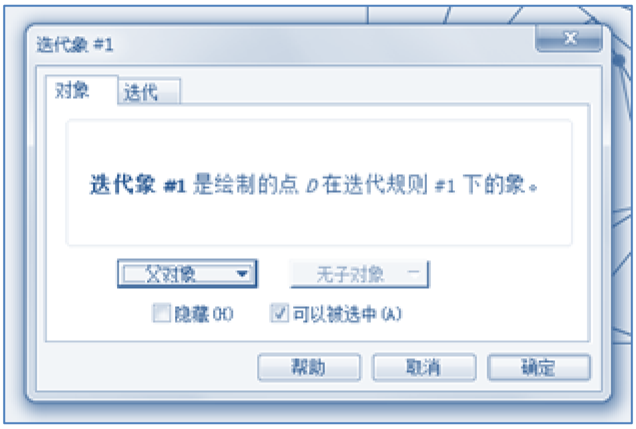


图 2

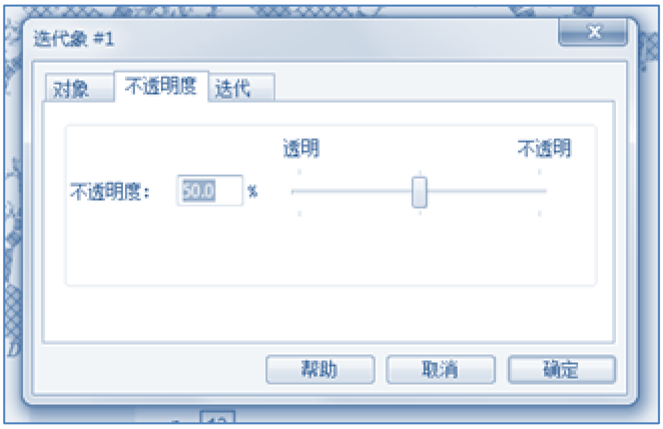


图 3

如图 3，迭代象窗口中有三个选项卡：对象、不透明度和迭代。在迭代选项卡中可以调节迭代象的显示方式（完整迭代、最终迭代）以及移动对象上的点的显示方式（到与初始对象上点相对类似的位置、到迭代路径的随机位置）。当移动对象上的点更改为到迭代路径上的随机位置时，点击开始随机化按钮可以观察迭代象的随机情况，如图 4。

迭代象选择多边形内部时，会出现不透明度卡，如图 3。

无参迭代时，在迭代选项卡中可调节迭代次数，如图 5。

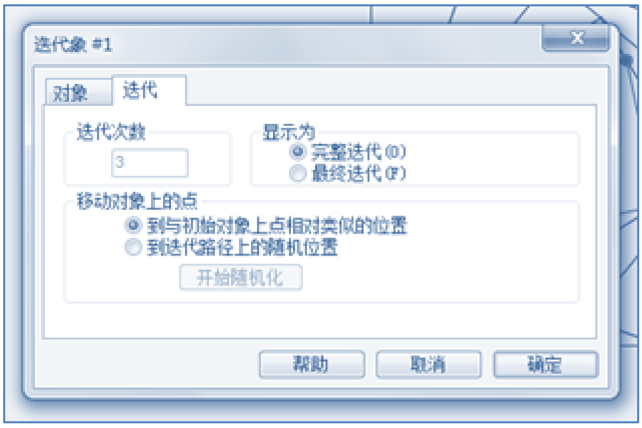


图 4

图 5

9、迭代象为点、线（线段、射线、弧线、轨迹）、多边形内部、圆内部时，可以修改其颜色、点型（线型），可以追踪迭代象，生成迭代象的动画。

迭代象为文本时，不能修改文本中字体的颜色、不能更换字体、不能调节字号大小，不能对其进行文本编辑。若要修改，只能找其父对象。

在半角英文状态下，选择迭代象，按 ! 键（Shift+1），直接会对迭代象路径上的点进行随机化处理。

五、迭代数据表

10、当创建一个迭代时，如果某个迭代结果的一个或多个度量值发生改变，画板会创建一个迭代数据的表。此表为每个可见值建立一个受迭代的影响的列，表的第一列的 n 个值表示迭代数（即经过的第几次迭代），表的每行所描述的数据表示在此次迭代上的度量值。

11、迭代数据表可以直接删除，但是，迭代数据表如果有后继使用，可以保留显示。

12、迭代数据表后继使用时，选择它可以调整迭代次数，详见例 7 斐波那契数列的作法 2。

第 3 章 迭代入门

第 1 节 单映射迭代

单映射迭代是指点击【变换➔迭代】，在迭代对话框中，点击结构➔添加新的映射中未添加新的映射时的迭代。原象可以是一个自由点、多个自由点、参数或自由点与参数的结合。

例 2 正五边形㈠

我们试着仅用旋转变换来实现正五边形的绘制。其效果如图 10，拖动任一点，都可以改变图形的大小，但不能调整边数。

作法：

1、任取点 A（旋转中心）、点 B（顶点）。以点 A 为中心，点 B 旋转 72° ，得点 B’。如图 6。

2、连接 BB’（边），得线段 a。此时线段 a 是点 B 的子对象。

3、以点 A 为中心，线段 a 旋转 72° ，得线段 b。不考虑点 A，我们把它们分成了两组，点 B 和线段 a，点 B’和线段 b。（重复旋转变换操作第一次，如图 7。）

4、以点 A 为中心，点 B’和线段 b 旋转 72° ，得点 B’’和线段 c;（重复旋转变换操作第二次，如图 8。）

5、以点 A 为中心，点 B’‘和线段 c 旋转 72° ，得点 B’’’和线段 d;（重复旋转变换操作第三次，如图 9。）

6、以点 A 为中心，点 B’‘’和线段 d 旋转 72° ，得点 B’’’’和线段 e;（重复旋转变换操作第四次，如图 10。）

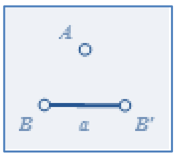


图 6

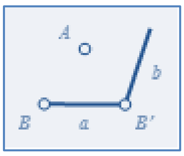


图 7

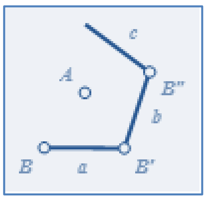


图 8

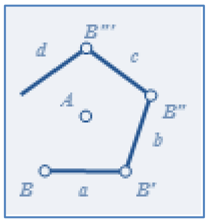


图 9

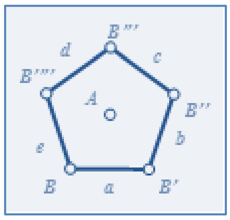


图 10

小结：

制作正五边形，我们重复操作了四次旋转变换。制作正 n 边形是不是就得重复操作 n-1 次？如果我们把线段 c 看作 B’’的子对象，线段 d 看作 B’’’的子对象，线段 e 看作 B’’’’的子对象，就不难发现，除点 A 外，这些点和线段可以通过点 B 和点 B 的子对象关于中心 A 旋转得到。结合对此例的理解，我们来完成例 3 正五边形㈡的绘制。

一、一原象（自由点），无参迭代

例 3 正五边形㈡

原理：依据旋转中心制作正五边形。其效果为：拖动点 A 或点 B 可改变图形的大小，但不可改变边数。

作法：

1、任取点 A（旋转中心）、点 B（顶点）。以点 A 为中心，点 B 旋转 72° ，得点 B′。连接 BB′（边）。

图 11

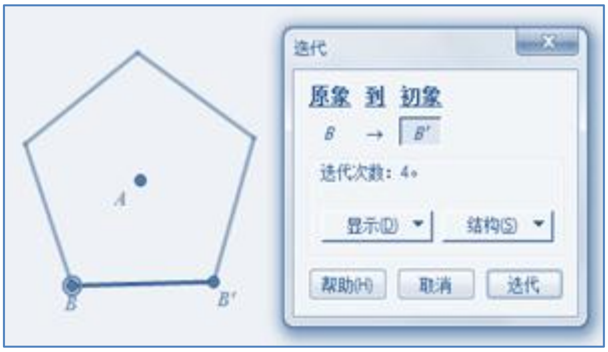


图 12

2、选择点 B，点击【变换→迭代】，在迭代对话框中选初象下方的方框，如图 11，此时点击点 B′，点击显示→增加迭代一次，如图 12。按迭代按钮，即得。

图 12 中迭代次数就是例 2 中重复操作旋转变换的次数。某种程度上讲，迭代次数可以理解为重复做某件事的次数。

二、一原象（自由点），有参迭代

例 4 正 n 边形(一)

原理：依据旋转中心制作正 n 边形（深度迭代）。拖动点 A 或点 B 可改变图形的大小，选择迭代象或参数 n=5，可调整多边形的边数。

作法：

1、【数据→新建参数】n=5，【数据→计算】$\frac{360^\circ}{n}$，用画点工具绘制点 A（旋转中心）、点 B（顶点）。

2、以点 A 为中心，点 B 旋转 $\frac{360^\circ}{n}$，得点 B′。连接 BB′（边）。

3、选择点 B，n=5，按 Shift 键，【变换→深度迭代】，B→B′，按迭代按钮，即得。如图 13。

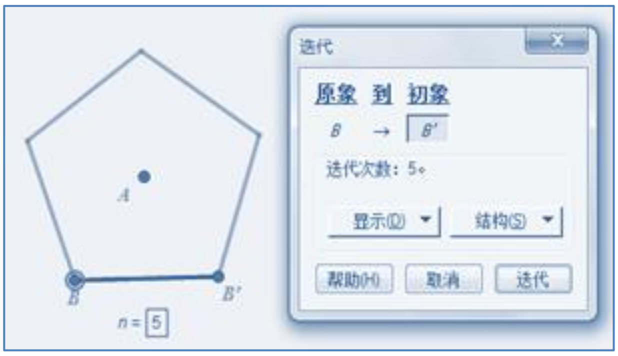


图 13

三、两原象（自由点），有参迭代

例 5 正 n 边形(二)

原理：依据多边形外角和为 360° 制作正 n 边形。拖动点 A 或点 B 可改变图形的大小，选择迭代象或参数 n=5，可调整多边形的边数。

作法：

1、【数据➔新建参数】n=5，【数据➔计算】$180° - \frac{360°}{n}$。

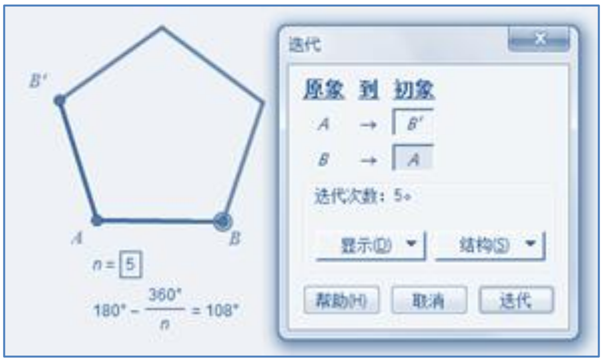


图 14

2、绘制点 A、点 B，以点 A 为中心，点 B 旋转$180° - \frac{360°}{n}$，得点 B’。连接 AB、AB’。

3、选择点 A，点 B，n=5，按 Shift 键，【变换➔深度迭代】，迭代|初象，（A，B）→（B’→A），按迭代按钮，即得。如图 14。

四、两原象（参数），有参迭代，以及多原象迭代。

例 6 等差数列(二)

求数列 1，3，5，7，⋯（n=1，2，3，⋯）前 n 项和。

原理：设公差为 d，前 n 项和为S_n，则有

$$S_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + (a_1 + (n-1)d)$$

在直角坐标系内绘制散点$(n,\ S_n)$。

作法：

1、【数据➔新建参数】x=1（项数），a_1=1（首项），d=2（公差），S_1=0（储存前 n-1 项的和），n=5（迭代次数）。点击【数据➔计算】x+1（项数加 1），$a_n = a_1 + (x-1)d$（第 n 项），$S_n = S_1 + a_n$（前 n 项和）。

我们来模拟迭代数据表来理解整个迭代过程：

n	x	$a_n = a_1 + (x-1)d$	S_1	$S_n = S_1 + a_n$
0	1	1	$S_0 = 0$	$S_1 = 1$
1	2	3	$S_1 = 1$	$S_2 = 4$
2	3	5	$S_2 = 4$	$S_3 = 9$
3	4	7	$S_3 = 9$	$S_4 = 16$

n	x	$a_n=a_1+(x-1)d$	S_1	$S_n=S_1+a_n$
4	5	9	$S_4=16$	$S_5=25$
5	6	11	$S_5=25$	$S_6=36$
…	…	…	…	…

2、选择 x=$\boxed{1}$，S_1=$\boxed{1}$，n=$\boxed{5}$，按 Shift 键，【变换→深度迭代】，迭代|**初象**，（x，S_1）→（x+1，S_n），按迭代按钮。如图 15。

3、选择迭代数据表，点击【绘图→绘制表中数据】，在弹出的绘制表中数据窗口（如图 16）点击**选择列**：y 右边的倒三角，在下拉菜单中选择S_n。此时，从表中绘制的点会变成$(\text{n}，S_n)$，如图 17，按绘制按钮。即得。

图 15

图 16

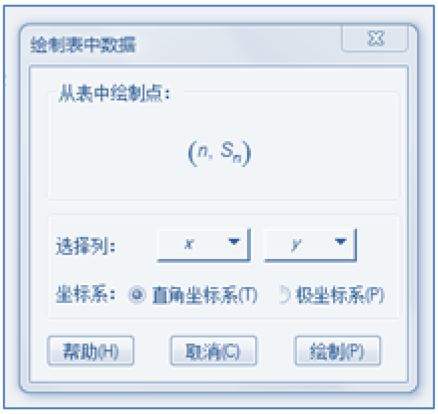


图 17

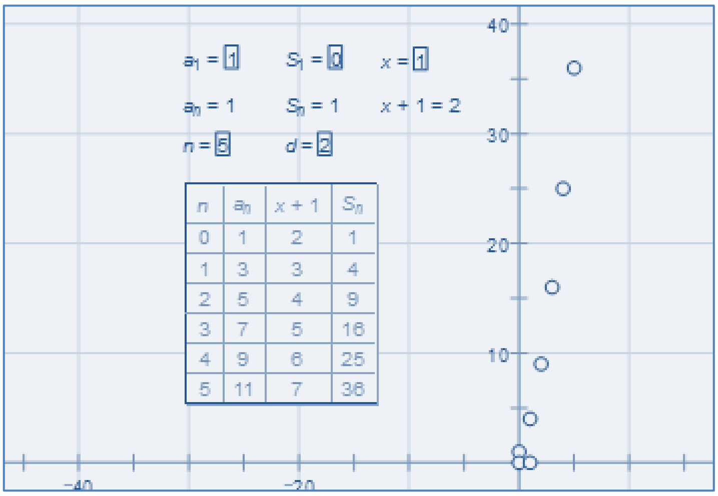


图 18

小结：

此时，绘图区会自动新建平面直角坐标系，并绘制出对应的点（如图 18），但这些点的父对象不是迭代数据表中的数据，所以调节 n 的大小和这些点的多寡没有任何关系。换句话说，坐标系中所绘制出的点不受迭代数据表控制——这些点失控了。因此，该数列的前 n 项求和只能采用另外的方法来实现。

我们知道

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \times d。$$

因此，在第 1 步中若将$S_1=\boxed{0}$，$a_n = a_1 + (x-1)d$，$S_n = S_1 + a_n$改为$S_n = xa_1 + \frac{x(x-1)}{2} \times d$。选择选择 x=$\boxed{1}$，n=$\boxed{5}$，按 Shift 键，【变换→深度迭代】，迭代|初象，x→x+1，如图 19，按迭代按钮。再按第 3 步操作，其效果一样。

现在问题就出来了，为什么不采用这种更简单的计算方式呢，这是因为我们在例 34 杨辉三角中求组合数时，会用到此例的思路。

等差数例在本书中会经常用到，因此，在本书开始之初就得把等差数列中的问题尽量写得详细一些。也只有这样，迭代变换才更容易让初学者上手。

另外，例 1 等差数列㈠和此例所选的数列是同一数列。等比数列与此类似，本书不重复书写。

图 19

例 7 斐波那契数列

若$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，则有$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$。

作法 1：

图 20

1、【数据→新建参数】n=$\boxed{5}$（迭代次数），$a_1=\boxed{1}$（首项），$a_2=\boxed{2}$（次项），点击【数据→计算】，得 $a_3 = a_1 + a_2$。

2、选择a_1=1，a_2=2，n=5，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，(a_1，a_2)➔(a_2，a_3)，如图 20，按迭代按钮，即得。

小结：

此作法的弊端显而易见：

1、只能在迭代数据表中看出a_3的值。

2、没有直观地反映出斐波那契数列的一般规律。

因此，我们作如下处理：试着在平面直角坐标中绘制出（n，a_n），更直观地看出a_n的变化趋势。为了防止绘制的点失控，我们利用迭代数据表来控制这些散点。见作法 2。

作法 2：

1、【数据➔新建参数】n=1（横坐标初始值），a_1=1（首项），a_2=2（次项），点击【数据➔计算】，得 $a_3 = a_1 + a_2$，n+1=2。

2、选择 n=1（横坐标初始值），a_1=1（首项），点击【绘图➔绘制点(x，y)】，如图 21，绘图区自动创建平面直角坐标系，点 O 为原点，点 P 为单位点，点 A 坐标为（1，a_1）。

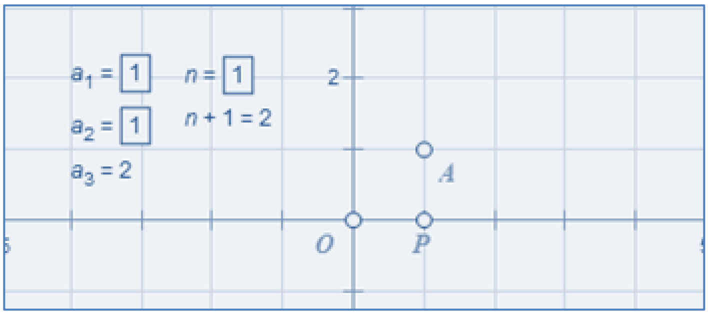


图 21

3、隐藏矩形网格，选择a_1=1，a_2=2，n=1，点击【变换➔迭代】，迭代|初象，(a_1，a_2，n)➔(a_2，a_3，n + 1)，如图 22，按迭代按钮。

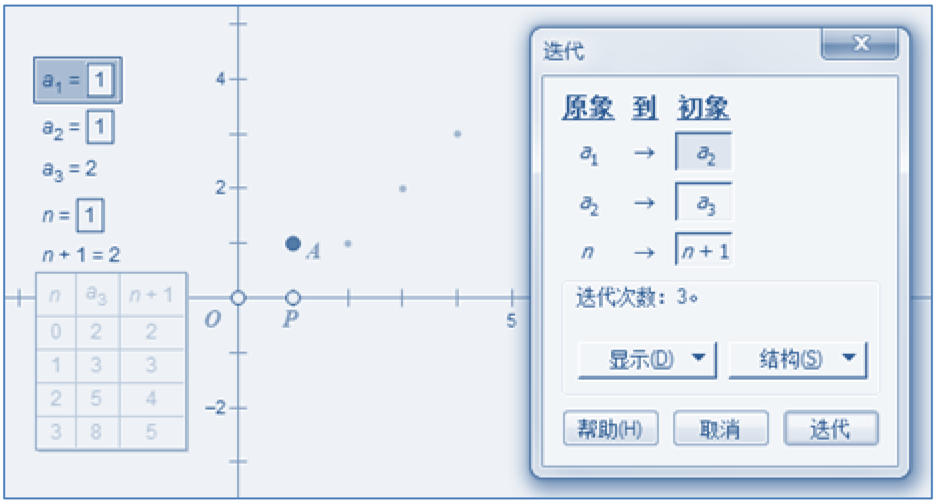


图 22

4、如图 23，选择迭代数据表，按数字键盘上的 + 键或 – 键，增加或减少迭代次数时，直角坐标系内的点也作相应的增加或减少。

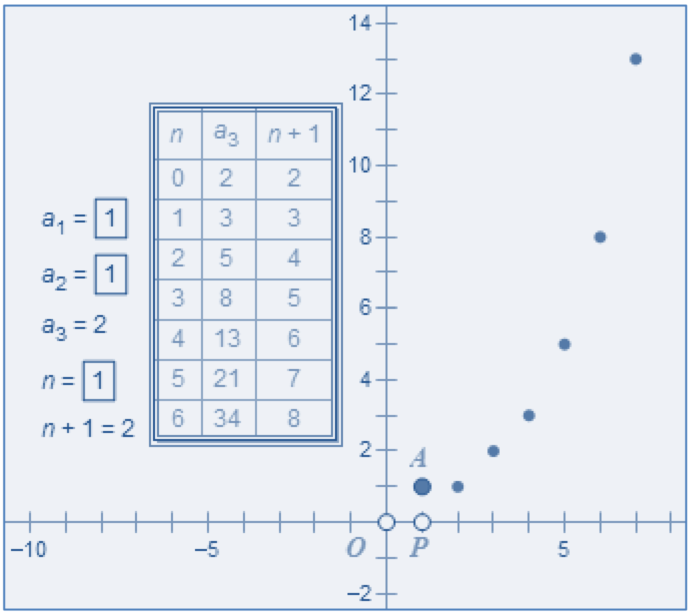


图 23

小结：

从作法 2 可以看出，迭代数据表可以参与计算过程。此法也是例 6 等差数列㈡中“点失控了”的解决方案之一。

五、半自由点迭代

详见例 40 曲边梯形、例 41 椭圆的弧长。

第 2 节 多映射迭代

多映射迭代是指点击【变换➔迭代】，在迭代对话框中，点击结构➔添加新的映射中添加新的映射后的迭代。原象可以是一个自由点、多个自由点、参数或自由点与参数的结合。

多映射迭代在分形几何中应用颇多。

一、引例

例 8 正方旋

效果：如图 26 左，在正方形 ABCD 中，点 M，点 E，点 F，点 G 分别为线段 AB，线段 BC，线段 CD，线段 DA 上的点，且 AM=BE=CF=DG。易知，四边形 MEFG 为正方形。类似地，在正方形 MEFG 中再找正方形 M'E'F'G'，…。

原理：利用旋转变换绘制正方形，利用点的值实现 AM=BE=CF=DG。

作法：

1、任取点 A、点 B。选择点 A，点 B，【构造➔线段】(连接 AB)，点击【构造➔线段上的点】，得点 M。点击【度量➔点的值】，得 M在$\overline{AB}$上 = 0.28 。

2、以点 B 为中心，点 A 旋转－90° ，得点 C；以点 A 为中心，点 B 旋转 90° ，得点 D。

3、选择点 B，点 C，【构造➔线段】(连接 BC)；连接 CD；连接 DA。顺次选择线段 BC，CD，DA，和 M在$\overline{AB}$上 = 0.28 ，点击【绘图➔在线段上绘制点】，得点 E，点 F，点 G。如图 24。

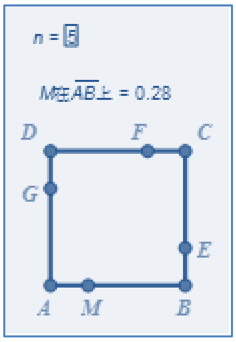


图 24

图 25

4、点击【数据➔新建参数】n=5，顺次选择点 A，点 B 和 n=5，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，(A，B)→(M，E)，按迭代按钮。如图 25。

5、拖动点 M（Move），可以得到不同的图形，如图 26。

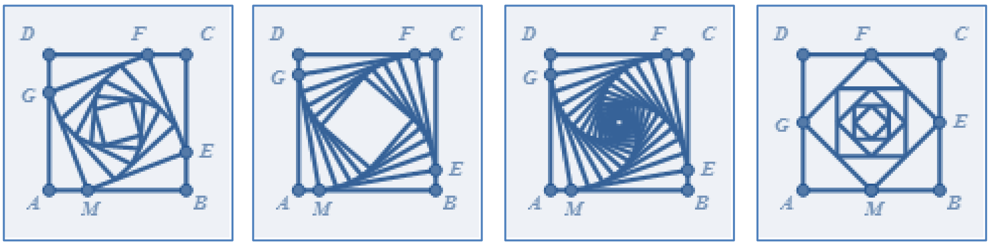


图 26

此例中的正方形，可以换成正五边形，如图 27。

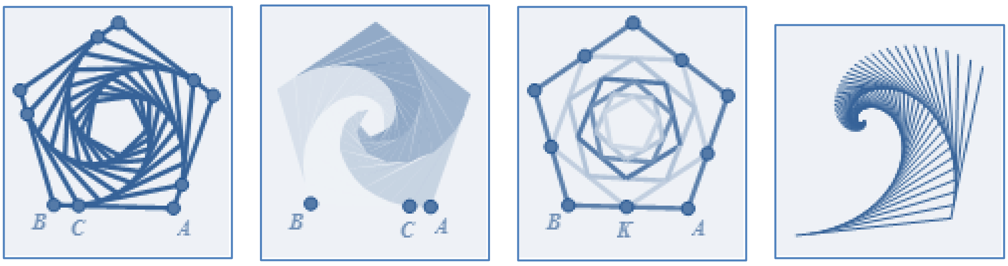


图 27

小结：

此例在有的书上称为“数学之美”。美就美在，这本书中第一次绘制出的精彩的图案，也是点的值与迭代一次小小的相遇，只不过，点 M 不受参数控制。在此基础上，本书给出了更一般情形的迭代案例，见例 36 双控旋梯（N 边旋）。

二、两原象，多映射，有参迭代

例 9 勾股树

效果：如图 28，拖动点 A 或点 B，可以改变正方形 ABCD 的大小；拖动点 F，迭代象随之摆动，出现不同的图案；参数 n=$\boxed{5}$，控制迭代次数。

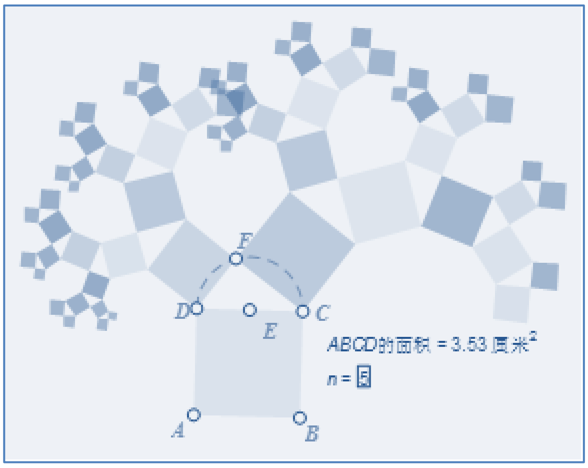


图 28

作法：

1、绘制正方形。用画点工具绘制点 A、点 B。以点 A 为中心，点 B 旋转 90° ，得点 D；以点 D 为中心，点 A 旋转 90° ，得点 C。选择点 A，点 B，点 C，点 D，点击【构造➔线段】。

2、绘制半圆弧上的点。选择线段 CD，点击【构造➔中点】点 E。选择点 E，点 C，点 D，点击【构造➔圆上的弧】。点击【构造➔弧上的点】点 F，如图 29。隐藏点 E 和弧 CD。

3、设置带参数的颜色。选择点 A，点 B，点 C，点 D，点击【构造➔四边形的内部】，点击【度量➔面积】得，ABCD的面积 = 3.53 厘米^2。选择四边形 ABCD 和 ABCD的面积 = 3.53 厘米^2，点击【显示➔颜色➔参数】，如图 30。按确定按钮。四边形 ABCD 的颜色就可以四边形的面积的变化而变化。如图 31。

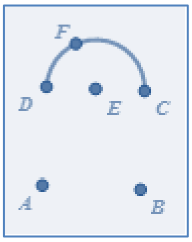


图 29

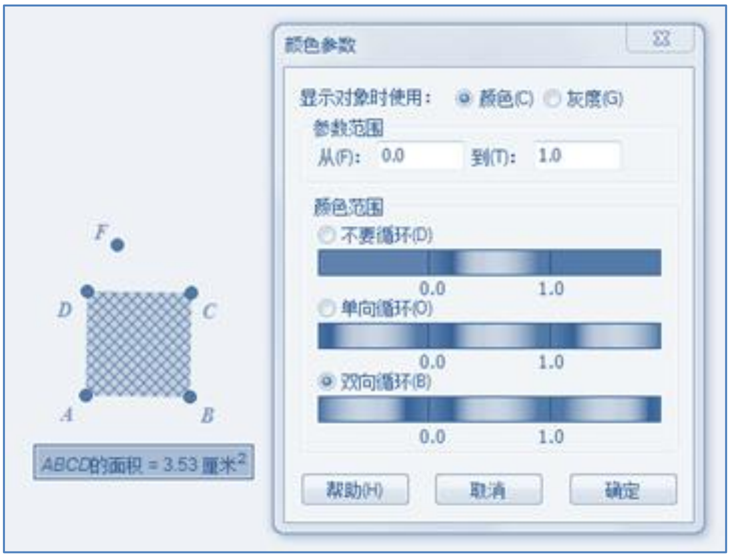


图 30

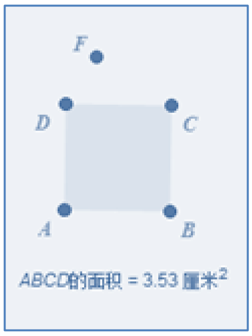


图 31

4、实现迭代。点击【数据➔新建参数】n=5，选择点 A，点 B 和 n=5，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|映象#1 映象#2，（A，B）→（D，F），（F，C），点击结构➔仅保留非点类项，如图 32，按迭代按钮。即得。

图 32

若在第 4 步改为如下步骤：点击【数据➔新建参数】n=13，选择点 A，点 B 和 n=13，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|映象#1 映象#2，（A，B）→（D，F），（F，C），点击结构➔仅保留非点类项，点击结构➔到所在对象的随机位置，按迭代按钮，如图 33。

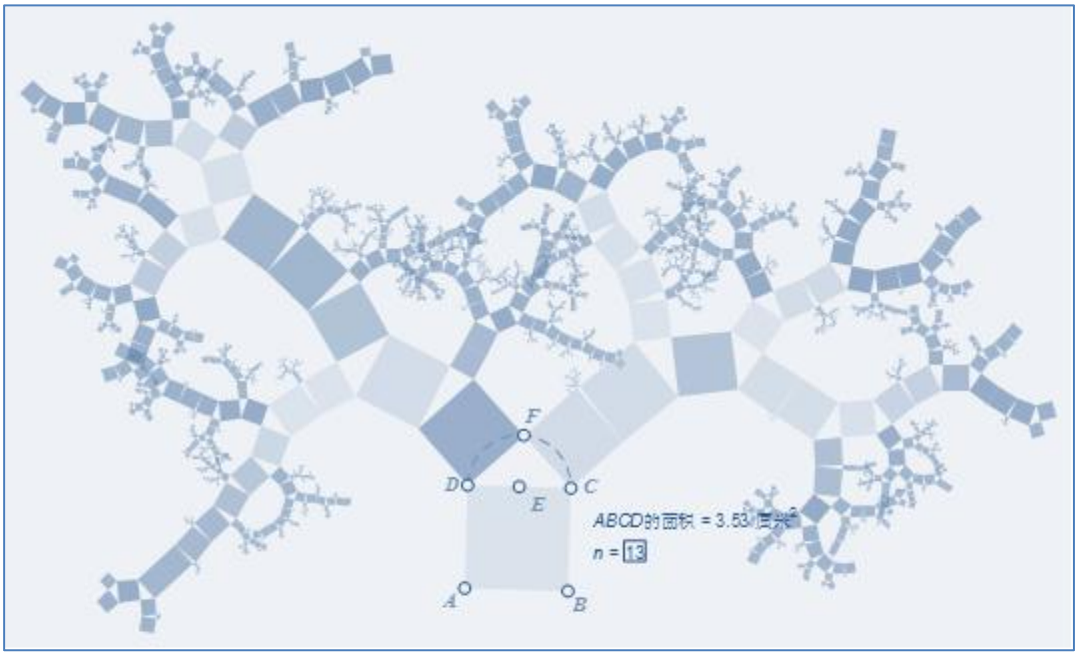


图 33

小结：

1、勾股树，又称毕达哥拉斯树。毕达哥拉斯树是由毕达哥拉斯根据勾股定理所画出来的一个可以无限重复的图形，因为重复数次后的形状好似一棵树，所以被称为毕达哥拉斯树。1988 年，劳威尔通过数值研究发现毕达哥拉斯树是一迭代函数系的 J 集。

2、用参数控制颜色时，要么是一个参数（例 16，例 30），要么是三个参数（例 19，例 20，例 21，例 22，例 23）。此例中用一个度数值来控制颜色。

例 10 柯赫曲线

1904 年，瑞典数学家柯赫构造了“Koch 曲线”几何图形。Koch 曲线大于一维，具有无限的长度，但是又小于二维。它和三分康托集一样，是一个典型的分形。根据分形的次数不同，生成的 Koch 曲线也有很多种，比如三次 Koch 曲线，四次 Koch 曲线等。

下面以三次 Koch 曲线为例，介绍 Koch 曲线的构造方法，其它的可依此类推。三次 Koch 曲线的构造过程主要分为三大步骤：

第一步，给定一个初始图形——一条线段；第二步，将这条线段中间的$\frac{1}{3}$处向外折起；第三步，按照第二步的方法不断的把各段线段中间的$\frac{1}{3}$处向外折起。这样无限的进行下去，最终即可构造出 Koch 曲线。

作法：

1、绘制“迭代元”。用画点工具绘制点 A、点 B。双击点 B，选择点 A，点击【变换→缩放】，在缩放窗口设置**缩放参数**：**固定比**为$\frac{1}{3}$，按缩放按钮，得点 C；双击点 A，选择点 B，点击【变换→缩放】，在缩放窗口设置**缩放参数**：**固定比**$\frac{1}{3}$，按缩放按钮，得点 D。双击点 D，选择点 C，点击【变换→旋转】，在旋转窗口设置**旋转参数**：**固定角度** 60 度，得点 E。连接 AD，DE，EC、CB。

2、深度迭代。点击【数据→新建参数】n=3，选择点 A、点 B 和 n=3，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|映象#1 映象#2 映象#3 映象#4，(A，B)→(A，D)，(D，E)，(E，C)，(C，B)，如图 34。点击显示→最终迭代，按迭代按钮。隐藏 AD，DE，EC，CB 即得。如图 35。(将此曲线暂记为“曲线 AB”。)

图 34

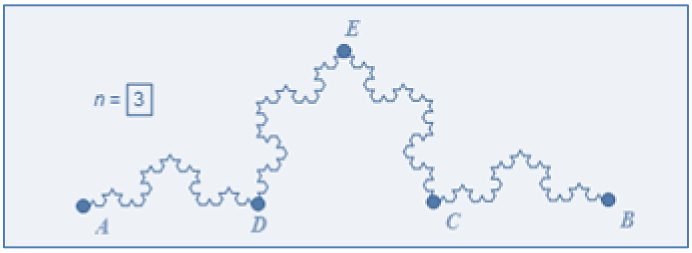


图 35

例 11 雪花曲线

本例在例 10 柯赫曲线的基础上，作法 1 利用点的合并来实现效果；作法 2 利用自定义工具来实现效果。

作法 1：

1、点击【数据→新建参数】n=3，用画点工具绘制点 A、点 B、点 C、点 D、点 E、点 F。

2、选择点 A、点 B 和 n=3，重复例 10 柯赫曲线步骤，得曲线 AB。同理得曲线 CD，曲线 EF。

注意，此步骤不能用复制命令得到曲线 CD 和曲线 EF。

3、用画点工具绘制点 K、点 L。双击点 K，选择点 L，点击【变换→旋转】，在旋转窗口设置**旋转参数**：**固定角度** 6 0 度，得点 M。

4、合并点。选择点 A，点 K，点击【编辑→合并点】(合并点 A 到点 K)；合并点 B 到点 M。合并点 C 到点 M；合并点 D 到点 L。合并点 E 到点 L；合并点 F 到点 K。合并前，如图 36。合并后，如图 37。

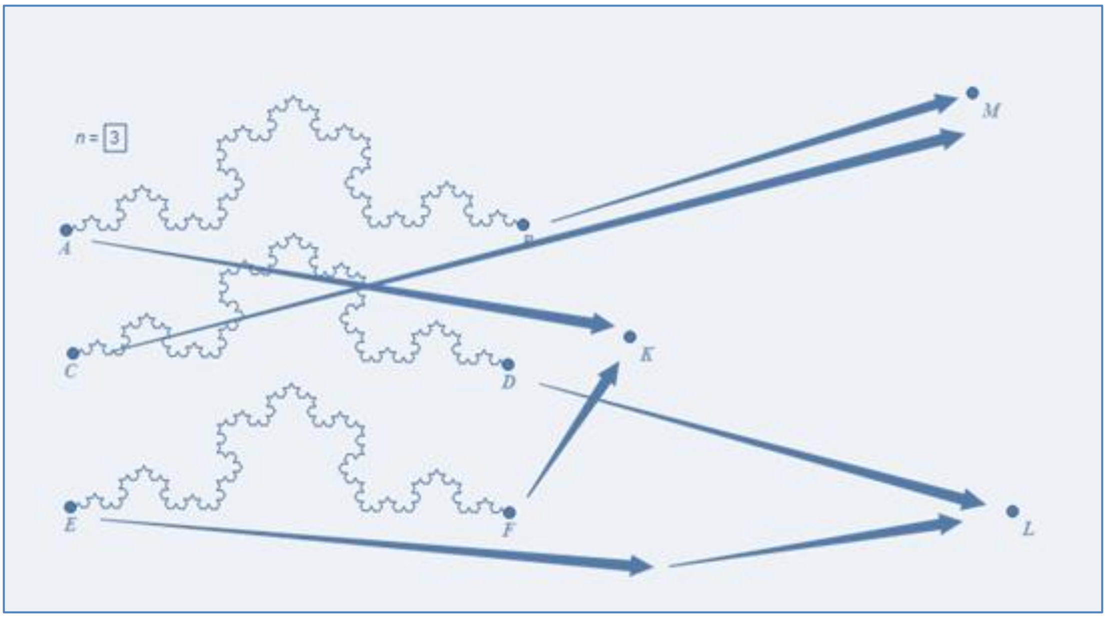


图 36

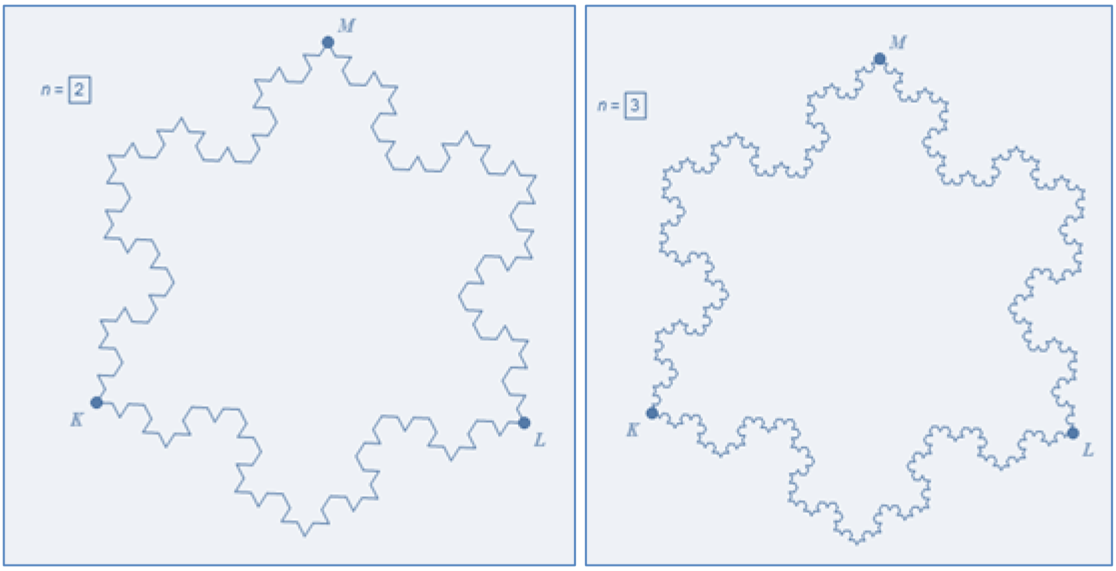


图 37

小结：

此例说明，先迭代，后合并。同时一定要注意最终迭代选项。同时，此例如此操作步骤烦琐，容易出错。

我们用自定义工具来简化步骤。

作法 2：

1、选择图 35 中的所有图元（包括参数 n=3），点击【▶⁝ ➔创建新工具…】，在弹出的新建工具窗口中，输入**工具名称：**柯赫曲线，勾选☑显示脚本视图(S)，如图 38，按确定按钮。

我们在新建工具的脚本的窗口中可以看到该工具的前提条件：1、点 A；2、点 B；3、度量值 n。

2、任取点 K，点 L。以点 K 为中心，点 L 旋转 60°，得点 M。

3、点击【▶⁝ ➔柯赫曲线】，顺次点击点 K，点 M，n=3，便绘制好了曲线 KM（如图 39 左），同理，绘制曲线 ML（如图 39 中）和曲线 LK（如图 39 右）。

图 38

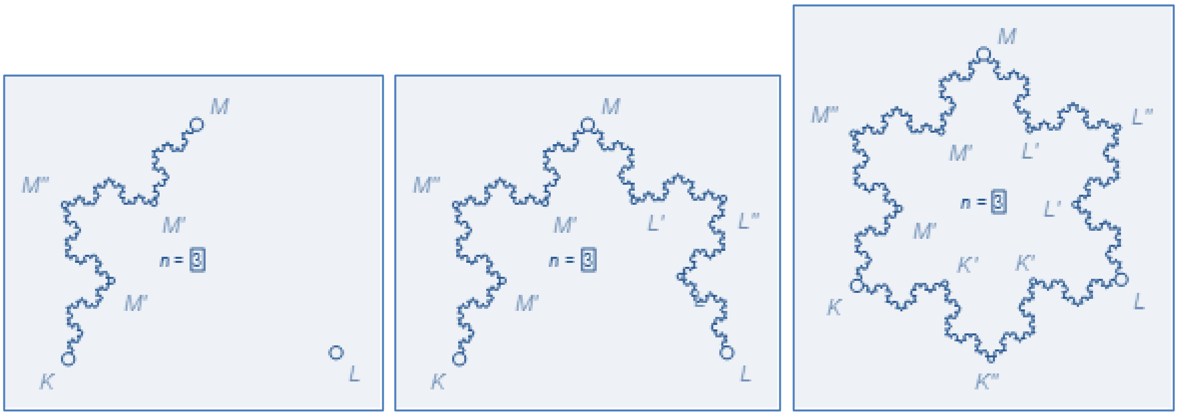


图 39

小结：

1、尝试着利用自定义工具或自定义变换（例 41 椭圆的弧长）来简化作图过程。

2、柯赫曲线是很复杂的，首先它有许多折点，到处都是“尖端”，用数学的语言讲，曲线虽然连续，但处处不可微，即没有切线。雪花曲线是最美丽的“病态曲线”之一，这些曲线所以被称为“病态”是因为它们的怪诞性质。这些曲线构成一个无限集合，如果上面这个画雪花的过程无限继续下去，其长度将趋于无限大，但它却始终是围在一个有限的区域里。这就是说，一步一步画出的每条曲线的长度构成一个发散数列，但是每条曲线所围的面积却构成一个收敛数列。

三、多原象，多映象，有参迭代

例 12 蜂巢

作法：

1、制作“迭代元”。用画点工具绘制点 A、点 B，双击点 A，选择点 B，点击【变换➔旋转】，在旋转窗口设置旋转参数：固定角度 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{0}$度，得点 C。选择点 C，点击【变换➔旋转】，在旋转窗口设置旋转参数：固定角度 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{0}$度，得点 D。连接 AB、AC、AD。

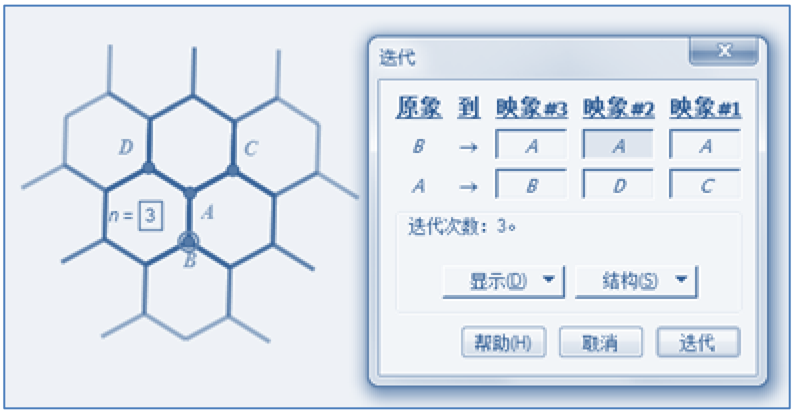


图 40

2、深度迭代。点击【数据➔新建参数】n=$\boxed{3}$，选择点 B，点 A 和 n=$\boxed{3}$，按$\boxed{\text{Shift}}$键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|映象#1 映象#2 映象#3，(B，A)➔(A，C)，(A，D)，(A，B)，如图 40。按$\boxed{\text{迭代}}$按钮，即得。

例 13 密铺四边形(一)

效果：如图 42，将任一四边形绕四边形一顶点进行密铺。拖动四边形 ABCD 的任一顶点，均可改变其形状；n=$\boxed{1}$控制迭代次数。

作法：

1、用多边形工具绘制任意无芯有边框的四边形 ABCD。

2、创建初象点。如图 41。逆时针选取以下三点：

点 D，点 A，点 B 沿标记向量 C|A 得点 P，点 E，点 F。

点 A，点 B，点 C 沿标记向量 D|B 得点 G，点 H，点 I。

点 B，点 C，点 D 沿标记向量 A|C 得点 J，点 K，点 L。

点 C，点 D，点 A 沿标记向量 B|D 得点 M，点 N，点 O。

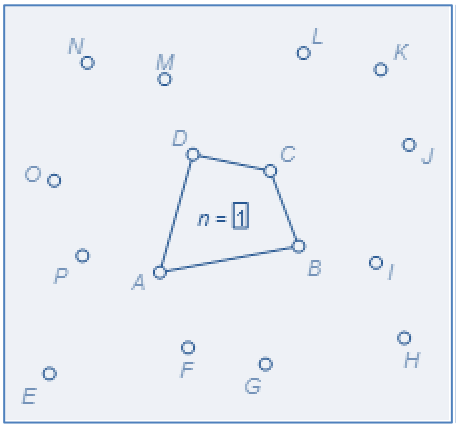


图 41

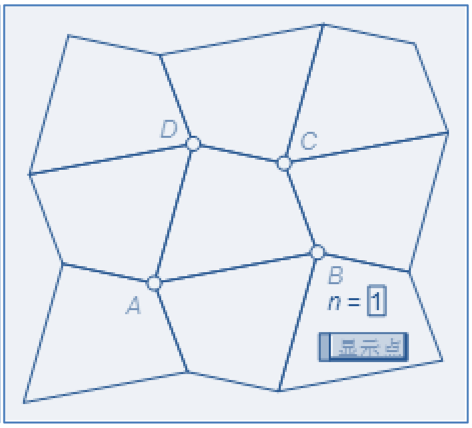


图 42

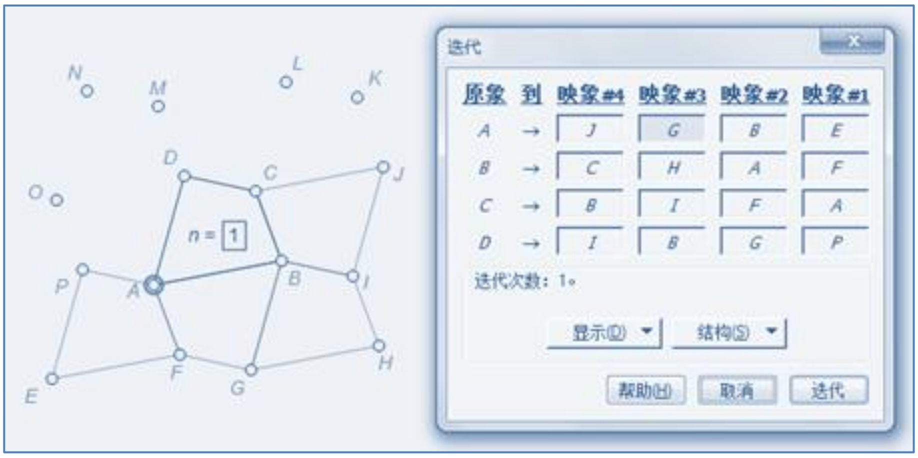


图 43

3、深度迭代。新建参数 n=1，选择点 A，点 B，点 C，点 D 和 n=1，按 Shift 键，迭代|映象#1 映象#2 映象#3 映象#4 映象#5 映象#6 映象#7 映象#8，(A，B，C，D)→(E，F，A，P)，(B，A，F，G)，(G，H，I，B)，(J，C，B，I)，(C，J，K，L)，(L，M，D，C)，(O，D，M，N)，(D，O，P，A)，点击结构→仅保留非点类项，按迭代按钮。即得。映象#1—映象#4，如图 43，映象#5—映象#8，如图 44。

说明：当(A，B，C，D)为逆时针选定时，(E，F，A，P)，(B，A，F，G)，(G，H，I，B)，(J，C，B，I)，(C，J，K，L)，(L，M，D，C)，(O，D，M，N)，(D，O，P，A)也按逆时针选定。

4、隐藏不必要的点，调整线型的粗线，等等。完成图如图 42。

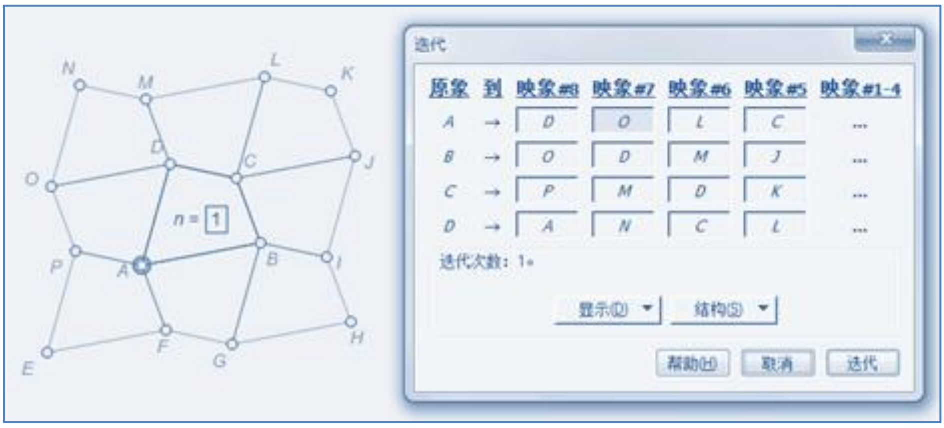


图 44

小结：

此例作法简洁易懂，但缺陷是：1、四边形的颜色不能得到控制。2、迭代产生大量重叠，严重影响几何画板的运行速度。另解详见例 30 密铺四边形㈡。

例 14 三角点阵

作法：

1、新建参数 t=4，n=4，计算 t－1=3。

2、任取点 A，点 B。以点 A 为中心，点 B 旋转 120° ，得点 B′。点 B 缩放 t，得点 C。

3、点 C 沿标记向量 A|B 平移，得点 D。

4、任取点 P，点 P 沿标记向量 A|B′平移，得点 E。点 P 沿标记向量 B|A 平移得点 F。

图 45

5、选择点 P，t=4，n=4，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|映象#1 映象#2，(P，t)➔(E，t－1)，(F，t－1)，如图 45，按迭代按钮。

6、合并点 P 到点 D。

7、选择参数 t=4，点击【编辑➔编辑参数】，在弹出的编辑参数定义窗口的编辑框内删除数字“4”，如图 46，然后用鼠标点击 n=4，此时，注意编辑参数定义窗口中的变化，如图 47，按确定按钮。(第 7 步的意思是：令 t=n。)

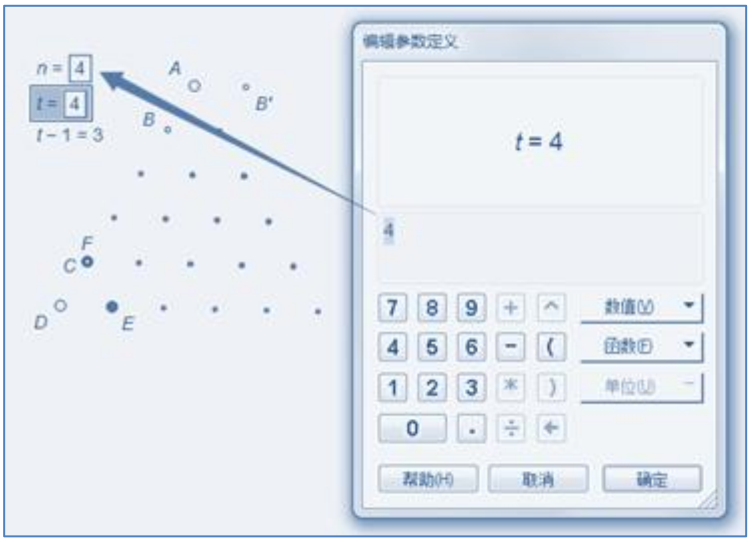


图 46　　图 47

8、效果图 48。调整参数 n=$\boxed{4}$，点的分布如例 34 杨辉三角一般。

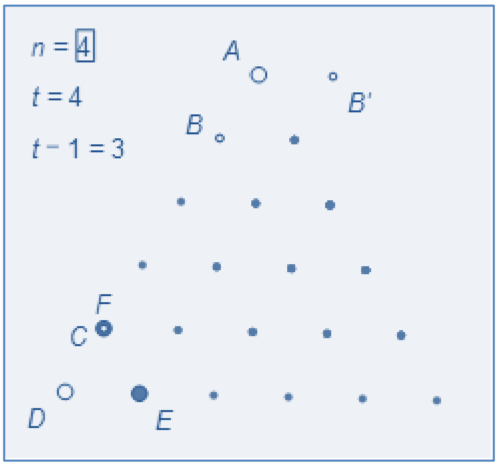
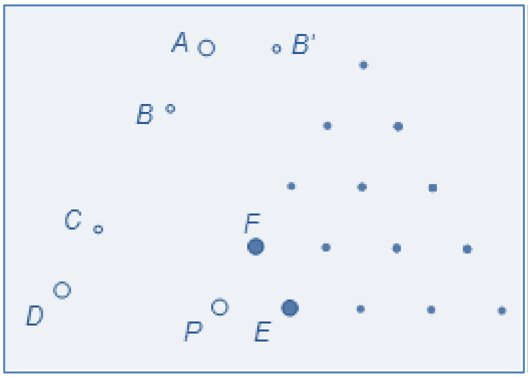


图 48

小结：

若将上述的第 4 步改为：“点 P 沿标记向量 A|B'平移，得点 E。点 P 沿标记向量 D|C 平移得点 F。”迭代完成后，再合并点 P 到点 D，就不会出现图 48 的效果，而是图 50。



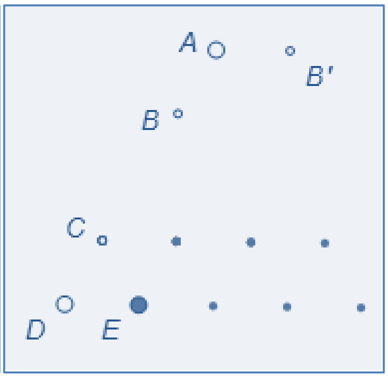


图 49　　图 50

如图 49，由平面向量的平行四边形法则可知，向量 DF 等于向量 DC 与向量 DP 的和。在合并点 P 到点 D 后，向量 DP 不存在了，也使得向量 DF 也不存在了。因此，在完成迭代作品过程中，若涉及点的合并时，我们要考虑到合并前与合并后各向量的存在与否，这直接导致迭代作品的成败。

我们还要注意到第 7 步的小细节。参数 t=3（原象）在参与完迭代过程后被重新定义为 t=n。

这个小细节提醒我们的板友们在阅读本书时，尽量多去回顾我们学过的知识。

同时，此例和例 13 密铺四边形㈠一样，迭代也产生了大量重叠。

例 15 Sierpinski 三角形

波兰著名数学家谢尔宾斯基在 1915—1916 年期间，为实变函数理论构造了几个典型的例子，这些怪物常称作“谢氏三角”、“谢氏地毯”、“谢氏海绵”、“谢氏墓垛”。如今，几乎任何一本讲分形的书都要提到这些例子。它们不但有趣，而且有助于形象地理解分形。

著名的 Sierpinski 三角形，它是很有代表性的线性分形，具有严格的自相似特点。不断连接等边三角形的中点，挖去中间新的小三角形进行分割——随着分割不断进行 Sierpinski 三角形总面积趋于零，总边长趋于无穷。Sierpinski 三角形在力学上也有实用价值，Sierpinski 三角形结构节省材料，强度高，埃菲尔铁塔的结构与它就很相似。

原理：如图 51，△ABC∽△ADF，△ABC∽△DBE，△ABC∽△FEC。

作法：

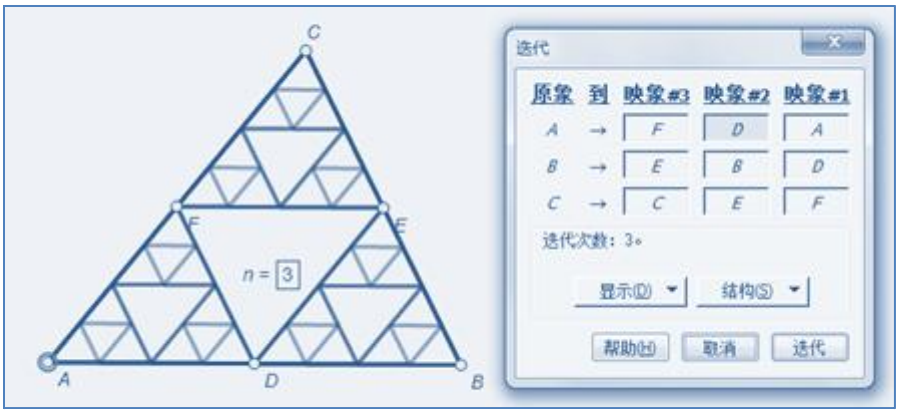


图 51

一、制作“迭代元”

1、用画点工具绘制点 A、点 B、点 C。

2、选择点 A，点 B，点 C，点击【构造→线段】，点击【构造→中点】，得点 D，点 E，点 F。

二、深度迭代

3、点击【数据→新建参数】n=3，选择点 A，点 B，点 C 和 n=3，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|映象#1 映象#2 映象#3，(A，B，C)→(A，D，F)，(D，B，E)，(F，E，C)，如图 51，按迭代按钮，即得。

例 16 Sierpinski 地毯

和 Sierpinski 三角形相似，只是步骤多了一些。取正方形将其 9 等份，得到 9 个小正方形，舍去中央的小正方形，保留周围 8 个小正方形。然后对每个小正方形再 9 等份，并同样舍去中央正方形。按此规则不

断细分与舍去，直至无穷。谢尔宾斯基地毯的极限图形面积趋于零，小正方形个数与其边的线段数目趋于无穷多，它是一个线集，图形具有严格的自相似性。

作法：

一、制作“迭代元”

1、用画点工具绘制点 A、点 B。

2、双击点 A，选择点 B，点击【变换→旋转】，在旋转窗口设置**旋转参数**：**固定角度** 9 0 度，得点 D。

3、选择点 A，点 B，点击【变换→标记向量】。

4、选择点 D，点击【变换→平移】，在平移窗口设置**平移变换**：**标记**，按 平移 按钮，得点 C。

5、选择点 A，点 B，点 C，点 D，点击【构造→线段】。

6、双击点 A，选择点 B，点 D，点击【变换→缩放】，在缩放窗口设置**缩放参数**：**固定比**为 $\frac{1}{3}$，按 缩放 按钮，得点 E，点 F；同理得点 G，点 H；点 I，点 J；点 K，点 L。选择点 A，点 E，点击【变换→标记向量】。

7、选择点 F，点 K，点击【变换→平移】，在平移窗口设置**平移变换**：**标记**，按 平移 按钮，得点 M，点 N。再次点击【变换→平移】，在平移窗口设置**平移变换**：**标记**，按 平移 按钮，得点 O，点 P。

二、设置带参数的颜色

8、选择点 M，点 O，点 P，点 N，点击【构造→四边形的内部】，点击【度量→面积】得，MOPN的面积 = 4.71 厘米^2。

9、选择四边形 MOPN 和 MOPN的面积 = 4.71 厘米^2，点击【显示→颜色→参数】，按 确定 按钮。如图 52。

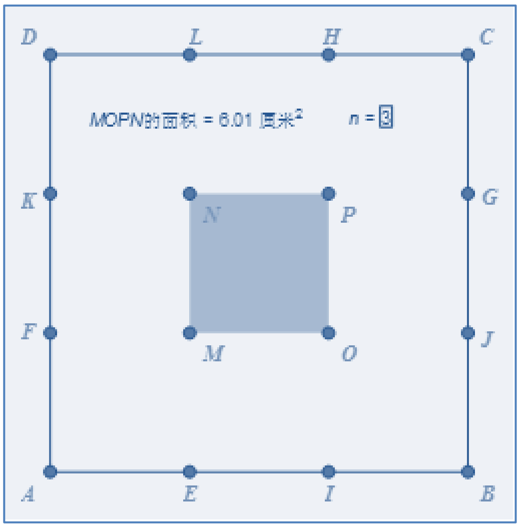


图 52

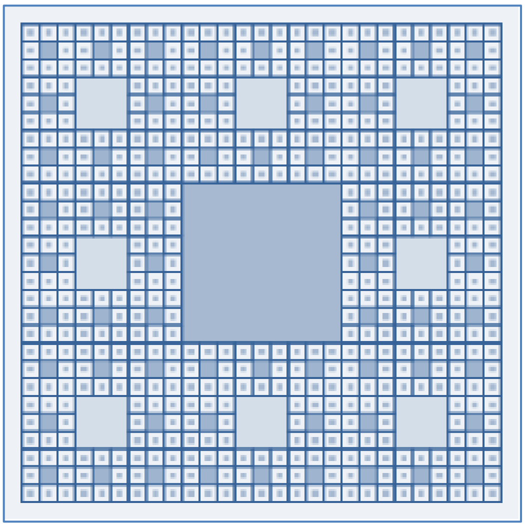


图 53

三、深度迭代

10、点击【数据→新建参数】n=3。

11、选择点 A，点 B 和 n=3，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代 **映象#1** **映象#2** **映象#3** **映象#4** **映象#5** **映象#6** **映象#7** **映象#8**，(A，B)→(K，N)，(N，P)，(P，G)，(F，M)，(O，J)，(A，E)，(E，I)，(I，B)，按 迭代 按钮，隐藏不必要的点和线段，即得。如图 53。

补充：例 16 原象为两个自由点，也可以为四个自由点。有兴趣的板友可以试试，这里不再重复。

例 17 分形树

作法：

一、制作“迭代元”

1、用画线段工具绘制线段 AB。在线段 AB 任取点 C、点 D。

2、双击点 A，选择点 C，点 D，点击【变换→旋转】，在旋转窗口设置**旋转参数**：**固定角度** 1 度（也可以是 2 度，3 度等），得点 E，点 F。

3、选择点 A，点 E，点 C，点击【构造→圆上的弧】，点击【构造→弧上的点】点 G。

4、选择点 A，点 F，点 D，点击【构造→圆上的弧】，点击【构造→弧上的点】点 H。连接 AG、AH。

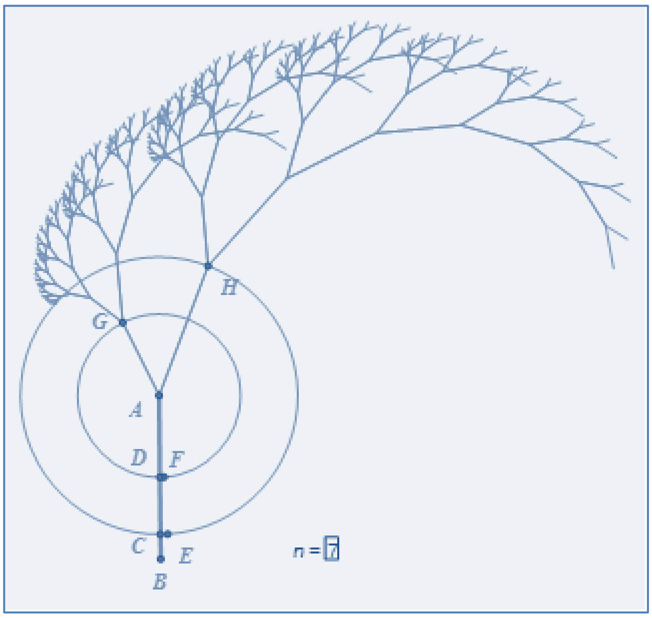


图 54

二、深度迭代

5、点击【数据→新建参数】n=7。

6、选择点 B，点 A 和 n=7，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|**映象#1 映象#2**，(B，A)→(A，G)，(A，H)，点击迭代按钮。删除所有弧的迭代象。如图 54。

如果将点 B 绕点 A 旋转 120 度得到点 M，将点 M 绕点 A 旋转 120 度得到点 N。

再将点 C、点 D 拖动到点 B，点 G 拖动到点 N，点 H 拖动到点 M，此图将会变成蜂巢。如图 55。

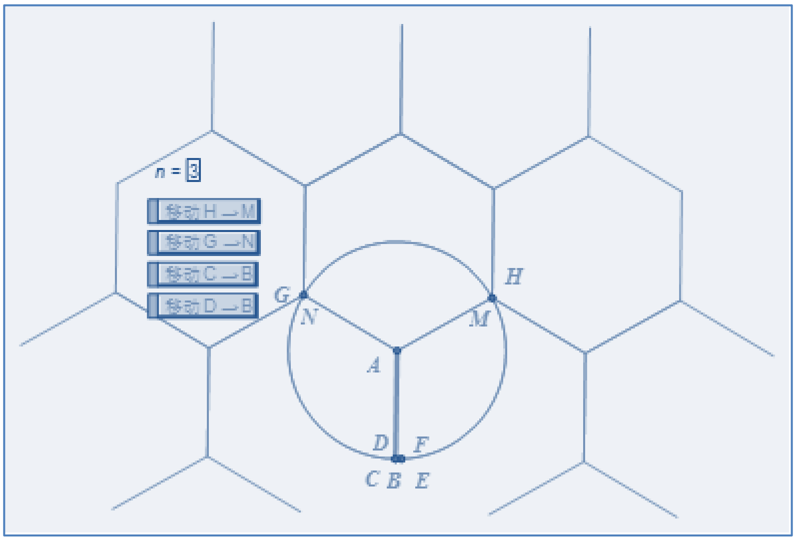


图 55

本章第 1 节所选的例子旨在帮助板友们认识几何画板中的迭代。第 2 节所选的例子是分形几何的一些迭代画法。分形几何与欧氏几何最大的不同有以下几点：

欧几里得几何	分形几何
◆ 经典的（2000 多年的历史）	◆ 现代数学怪物（30 多年的历史）
◆ 基于特征长度与比例	◆ 无特征长度与比例
◆ 适合于人工制品	◆ 实用于大自然现象
◆ 用公式描述	◆ 用（递归或迭代）算法描述
◆ 图形规则	◆ 图形不规则
◆ 图形的结构层次有限	◆ 图形的结构层次无限
◆ 局部一般不具有整体的信息	◆ 局部往往具有整体的信息
◆ 图形越复杂，背后的规则也越复杂	◆ 图形复杂，其背后的规则经常是简单的

第 3 节 习题

1、利用本章知识点完成图 56 图案设计。要求：不使用菜单【数据➔计算】。

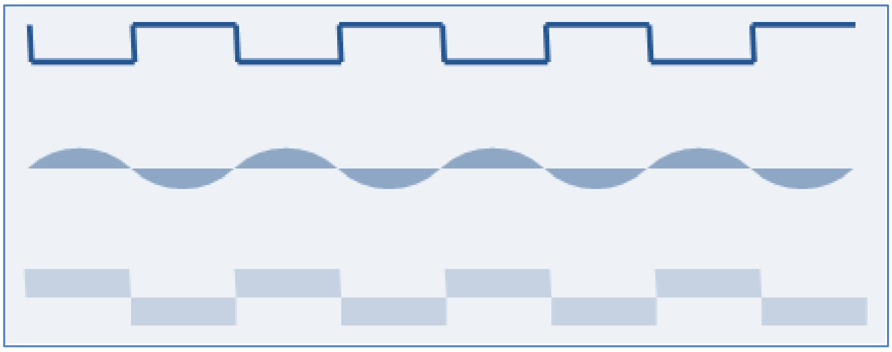


图 56

2、(1)绘制黄金分割矩形，如图 57；(2)绘制对数螺线，如图 58。要求：不使用菜单【数据➔计算】。

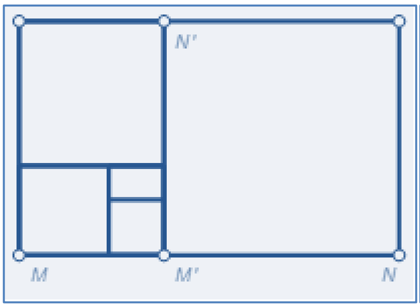


图 57

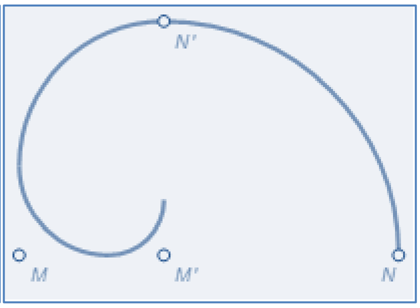


图 58

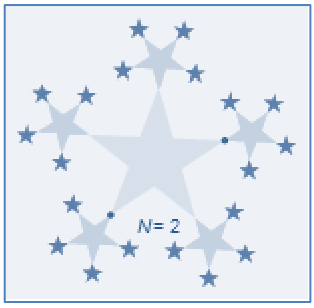


图 59

3、已知等比数列$a_n = a_1 \times q^{n-1}$，且$a_1 = 4$，$q = \frac{1}{2}$，n 为正整数，作数列图象。

4、已知数列的递推公式为$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$，且$a_1 = 4$，$n$ 为正整数，作数列图象。要求：迭代数据表控制平面直角坐标系内的散点。

5、完成五角形迭代（如图 59）。要求：N 为迭代参数，五角形的颜色随五角形的面积变化。（原创：潘建平）。

6、完成 H 迭代（如图 60）。

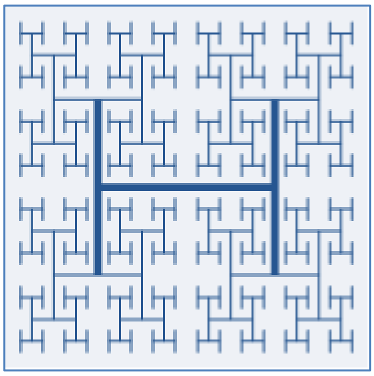


图 60

第 4 章 函数的迭代[①]

例 18 用导数法求一元四次方程的近似实数根

求方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的实数根

原理：

$$x_{n-1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

作法：

1、新建参数 $a=\boxed{-0.1}$，$b=\boxed{-0.1}$，$c=\boxed{1}$，$d=\boxed{2}$，$e=\boxed{-1}$，$n=\boxed{5}$。

2、点 A 为平面直角坐标系内任一点，度量点 A 的横坐标x_A。

3、绘制函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，选择此表达式，点击【数据➔定义导函数】，得

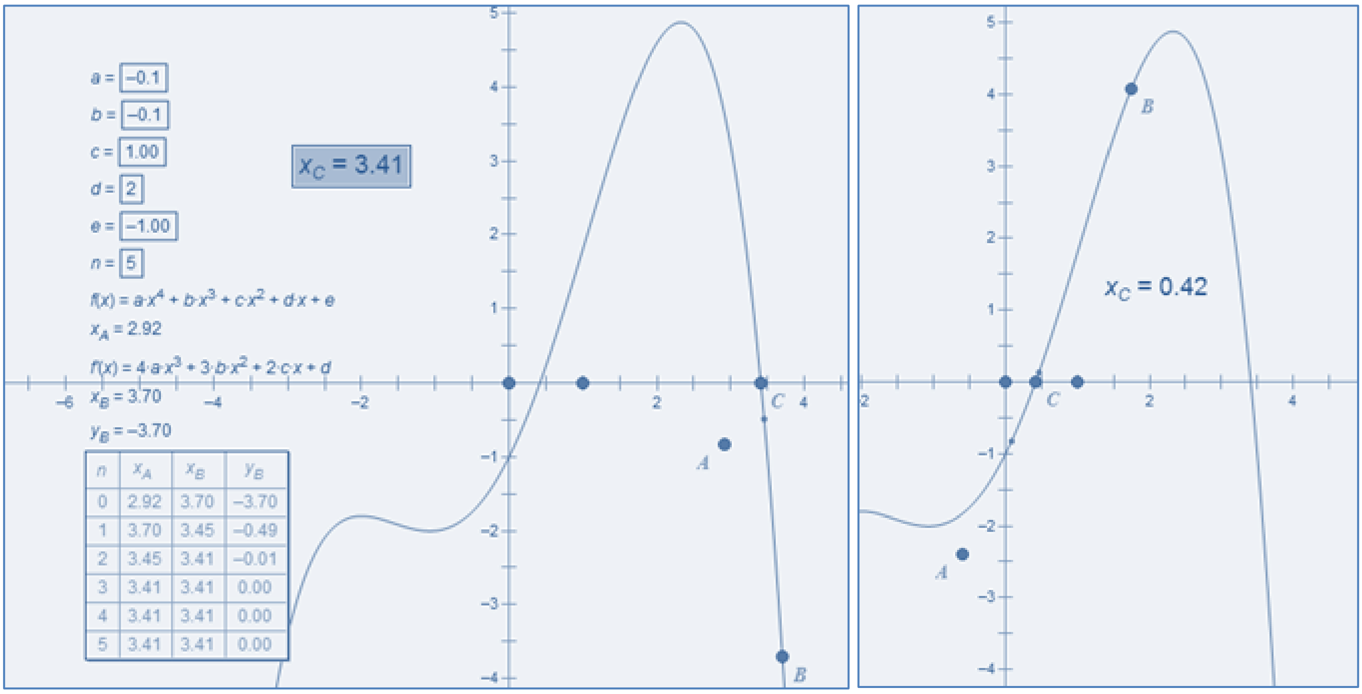
$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

4、计算$x_B=x_A-\frac{f(x_A)}{f'(x_A)}$，$y_B=f(x_B)$，绘制点 $B(x_B, y_B)$。

5、选择点 A，n=5，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，A→B，按迭代按钮。

6、选择迭代象，点击【变换➔终点】，得点 C，度量点 C 的横坐标x_C。

所以 $x_C=0.42$ $x_C=3.41$ 是原方程的实数根。如图 61。



n	x_A	x_B	y_B
0	2.92	3.70	−3.70
1	3.70	3.45	−0.49
2	3.45	3.41	−0.01
3	3.41	3.41	0.00
4	3.41	3.41	0.00
5	3.41	3.41	0.00

图 61

① 本章为选学内容。

补充：

若不用迭代变换，此例有更简单的作法：

1、新建参数 $a=\boxed{-0.1}$，$b=\boxed{-0.1}$，$c=\boxed{1}$，$d=\boxed{2}$，e=$\boxed{-1}$，n=$\boxed{5}$。

2、点击【绘图➔绘制新的函数】，在新建函数窗口中键入$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，按$\boxed{\text{确定}}$按钮。此时在绘图区自动新建平面直角坐标系，并绘出$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$的图象。

3、选择函数图象和 x 轴，点击【构造➔交点】，得点 A（左），点 B（右）。选择点 A，点 B，点击【度量➔横坐标】，得$x_A=0.42$，$x_B=3.41$。

例 19 MIRA（米拉）

作法：

1、在平面直角坐标系内任取点 A，度量点 A 的横&纵坐标(x_A, y_A)。

2、新建参数 a=$\boxed{0.4}$，b=$\boxed{0.99875}$。（b 取得尽量接近 1）。

3、新建函数$f(x)=ax+\frac{(1-a)x^2}{1+x^2}$，计算$x_B=f(x_A)+by_A$，$y_B=f(f(x_A)+by_A)-x_A$。绘制点B$(x_B, y_B)$。

5.选择点 B 和x_B，y_B，x_A。点击【显示➔颜色➔参数】，如图 62，设置显示对象时使用：◉红色、绿色、蓝色(R)（用参数x_B来控制红色，用参数y_B来控制绿色，用参数x_A来控制蓝色，也就是说，x_B，y_B，x_A这三个参数的选择顺序可以调换），按$\boxed{\text{确定}}$按钮。此时发现 B 点的颜色变了，其实 B 点已经隐藏起来，看到的是同一位置上的另外一个点 B’。

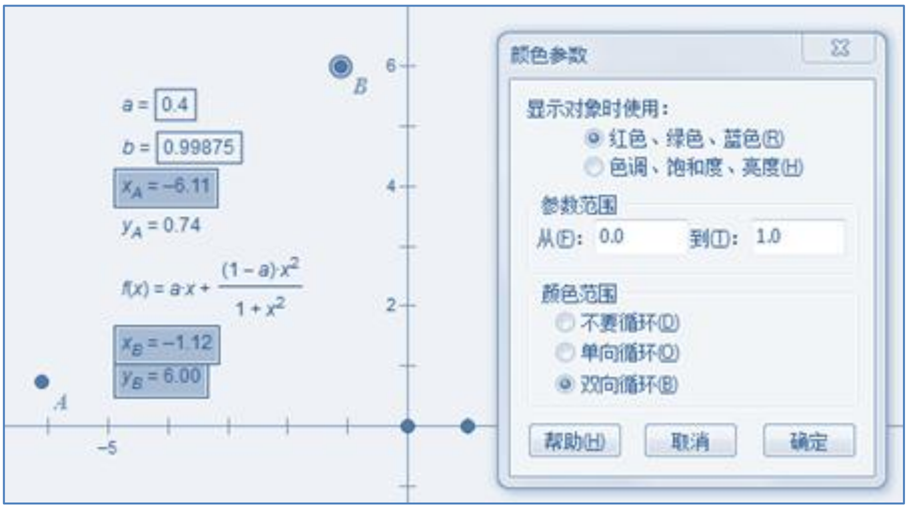


图 62

6、新建 n=$\boxed{1700}$，选择点 A 和 n=$\boxed{1700}$，按$\boxed{\text{Shift}}$键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，A→B’，按$\boxed{\text{迭代}}$按钮。拖动点 A，可以得到不同的图案，如图 63。

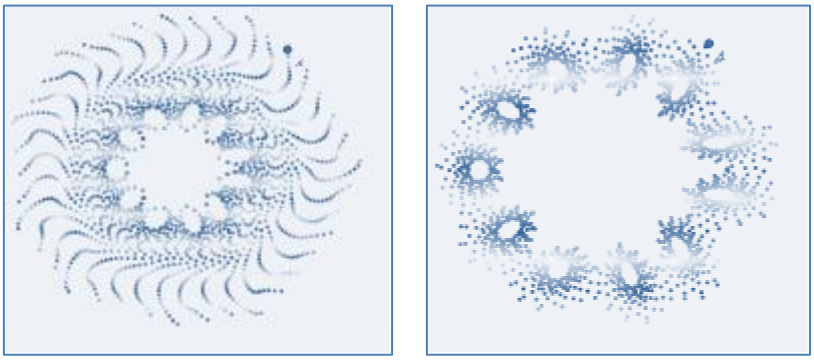


图 63

例 20 Henon Map（埃农映射）

作法：

1、在平面直角坐标系内任取点 A，度量点 A 的横&纵坐标$(x_A，y_A)$。

2、新建参数 a=$\boxed{1.4}$，b=$\boxed{0.4}$。

3、计算$x_B = 1 - ax_A^2 + y_A$，$y_B = bx_A$。绘制点 B$(x_B，y_B)$。

4.选择点 B 和x_B，y_B，x_A，点击【显示→颜色→参数】，设置显示对象时使用：◉红色、绿色、蓝色(R)，按确定按钮。得到点 B'。

5、新建 n=1500，选择点 A 和 n=1500，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，A→B'，按迭代按钮，如图 64。

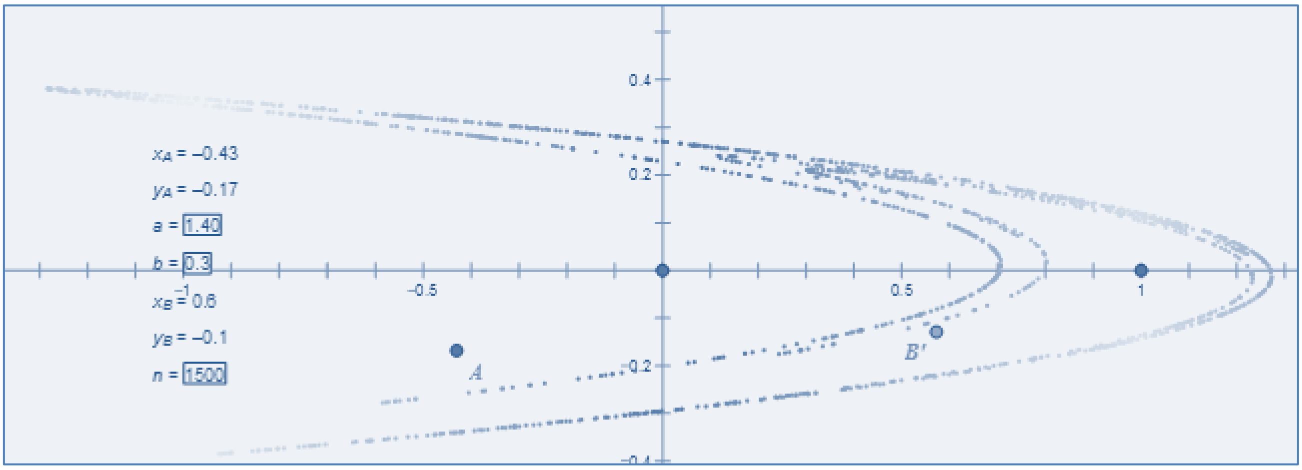


图 64

例 21 Mandelbrot sets（曼德布洛特集合）

原理：

因为例 21 Mandelbrot sets（曼德布洛特集合）和例 22 Julia Sets（朱丽亚集）其实是复数平面迭代，我们先来复习一下复平面的一些知识。

设 $z_k = x_k + iy_k$，$\mu = p + iq$，

$$\because\ z_k^2 = x_k^2 - y_k^2 + 2ix_k y_k,$$

$$\therefore\ z_k^2 + \mu = \left(x_k^2 - y_k^2 + p\right) + i(2x_k y_k + q),$$

$$\therefore\ x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + p,\ y_{k+1} = 2x_k y_k + q.$$

聪明的你应该知道怎么表示复平面上的点的平方了吧。

好了，那么什么是 Julia 集和 Mandelbrot 集合，他们之间的区别是什么呢？考虑$z_{k+1} = z_k^2 + \mu$，给定复数初值z_0和 μ，得到无穷复数序列$\{z_k\}$。

Julia 集：固定μ，J_μ={z_0丨序列$\{z_k\}$有界}；

Mandelbrot 集：固定z_0，M_z={μ丨序列$\{z_k\}$有界}。

作法：

一、基础工作

1、平面直角坐标系的第四象限内取点 A，点 A 关于 x 轴反射，得点 B；点 A，点 B 关于 y 轴反射，得点 D、点 C。

2、连接 AB，BC，CD，DA，得矩形 ABCD（矩形 ABCD 为观察区）。

3、线段 CD 上取点 E，点 E 关于 y 轴反射，得点 E′。

4、连接 EE′，在线段 EE′上任点 G。度量点 G 横&纵坐标(x_G，y_G)。

5、度量绘图区任一点 F 的横&纵坐标(x_F，y_F)，并计算$x_H = x_F^2 - y_F^2 + x_G$，$y_H = 2x_F y_F + y_G$。

6、绘制点 H(x_H，y_H)。

二、深度迭代

7、新建参数 n=100，选择点 F 和 n=100，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|**初象**，F→H，按迭代按钮。

三、轨迹

8、选择迭代象，点击【变换→终点】，得到迭代终点 I。度量 I 的横&纵坐标$\left(x_I,\ y_I\right)$，并计算$\frac{x_I}{y_I}$。

9、选择 x_I，y_I，$\frac{x_I}{y_I}$ 和点 G（注意是点 G），点击【显示→颜色→参数】，设置**显示对象时使用**：红色、绿色、蓝色(R)，按确定按钮。得到点 G′。

10、选择点 G′，点击【构造→轨迹】。隐藏线段 EE′、迭代象、点 H、点 I。

11、选择刚才的轨迹，点击【显示→追踪轨迹】。

12、移动点 F 到原点。

13、拖动点 E，可以得到 Mandelbrot 集合，如图 65。

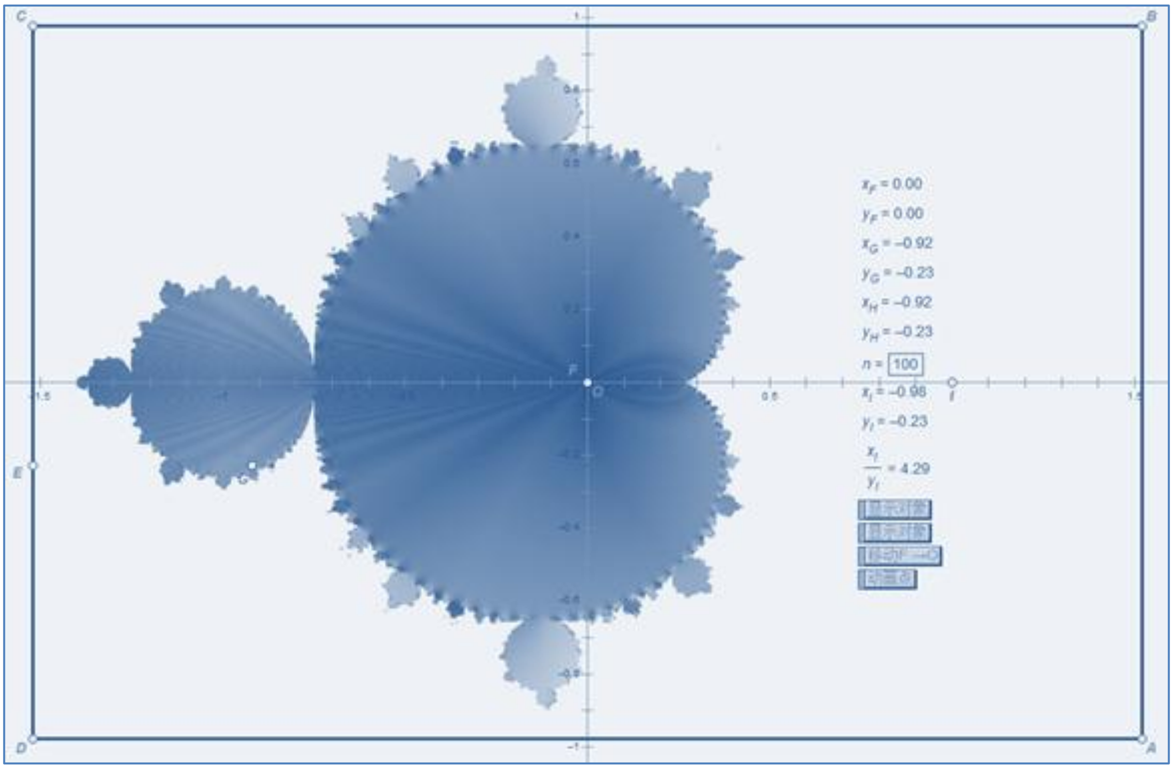


图 65

例 22 Julia Sets（朱丽亚集）

作法：

1、如上例步骤 1—4。

2、度量绘图区任一点 F 的横&纵坐标$\left(x_F, y_F\right)$，并计算$x_H = x_G^2 - y_G^2 + x_F$，$y_H = 2x_G y_G + y_F$。

3、绘制点 H$\left(x_H, y_H\right)$。注意此处点 H 的横&纵坐标计算和上例不一样。

4、新建参数 n=$\boxed{30}$，选择点 G 和 n=$\boxed{30}$，按 $\boxed{\text{Shift}}$键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|**初象**，G→H，按$\boxed{\text{迭代}}$按钮。

5、选择佚代象，点击【变换➔终点】，得到迭代终点 N。

6、度量 N 的横&纵坐标$\left(x_N, y_N\right)$，并计算$\frac{x_N}{y_N}$。

7、选择 x_N，y_N，$\frac{x_N}{y_N}$ 和点 G，点击【显示➔颜色➔参数】，设置**显示对象时使用**：◉红色、绿色、蓝色(R)，按$\boxed{\text{确定}}$按钮。得到点 G′。

8、选择点 G′，点击【构造➔轨迹】。隐藏线段 EE′、迭代象、点 F、点 H 和点 N。选择刚才的轨迹，点击【显示➔追踪轨迹】。

9、拖动点 E，可以得到 Julia 集，如图 66。

当点 F 处在不同的象限时，所得的 Julia 集也是不相同的。但是，点 F 不能移动到原点。

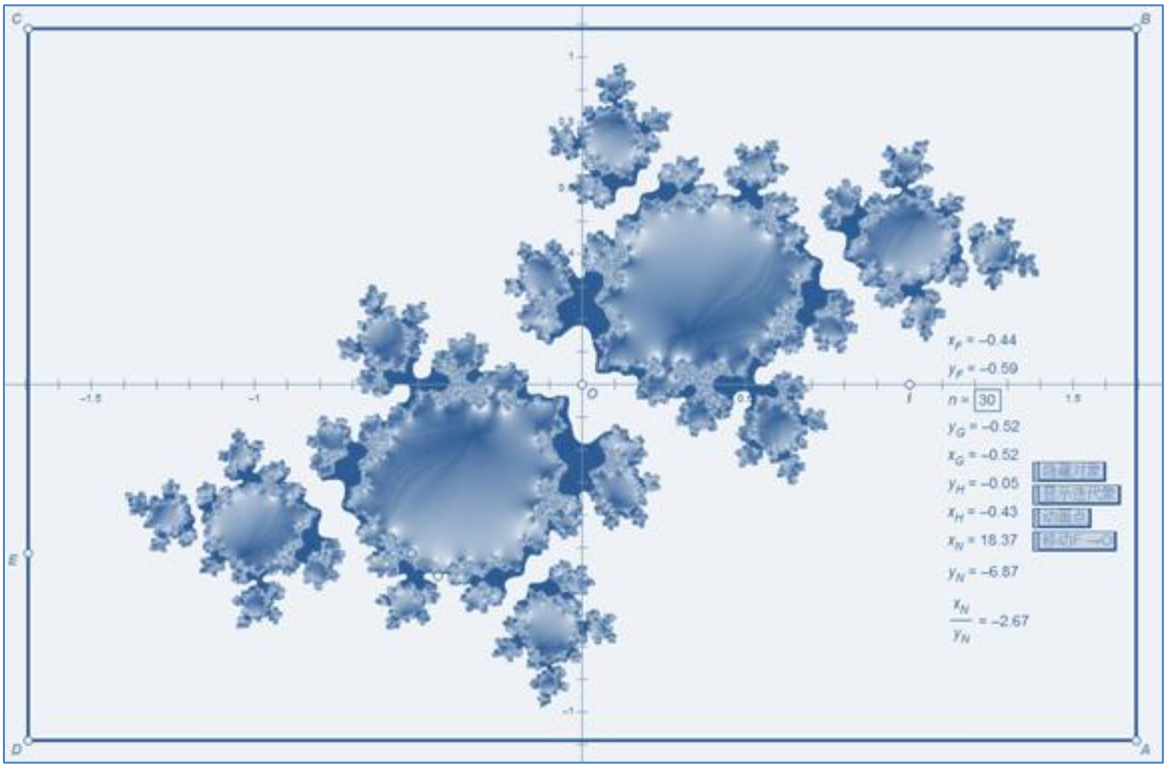


图 66

例 23 牛顿迭代法

作法：

1、重复例 21 步骤 1—4。

2、度量绘图区任一点 F 的横&纵坐标(x_F, y_F)，计算$x_H=\frac{x_F^2-y_F^2}{3(x_F^2+y_F^2)^2}+\frac{2x_G}{3}$，$y_H=\frac{2x_F y_F}{3(x_F^2+y_F^2)^2}+\frac{2y_G}{3}$。

3、绘制点 H(x_H, y_H)。

4、新建参数 n=100，选择点 F 和 n=100，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，F→H，按迭代按钮。

5、选择迭代象，点击【变换→终点】，得到迭代终点 I。

6、度量 I 的横&纵坐标(x_I, y_I)，并计算$\frac{x_I}{y_I}$，选择 x_I，y_I，$\frac{x_I}{y_I}$ 和点 G（注意是点 G），点击【显示→颜色→参数】，设置显示对象时使用：◉红色、绿色、蓝色(R)，按确定按钮。得到点 G’。

7、选择点 G’，点击【构造→轨迹】。隐藏线段 EE’、迭代象、点 H、点 I。

8、选择刚才的轨迹，点击【显示→追踪轨迹】。

8、将点 F 靠近原点，但不能重合。

10、拖动点 E，可以得到牛顿迭代图象。（注意：此处不能将点 F 移动到原点，原书中描述有误。）如图 67。

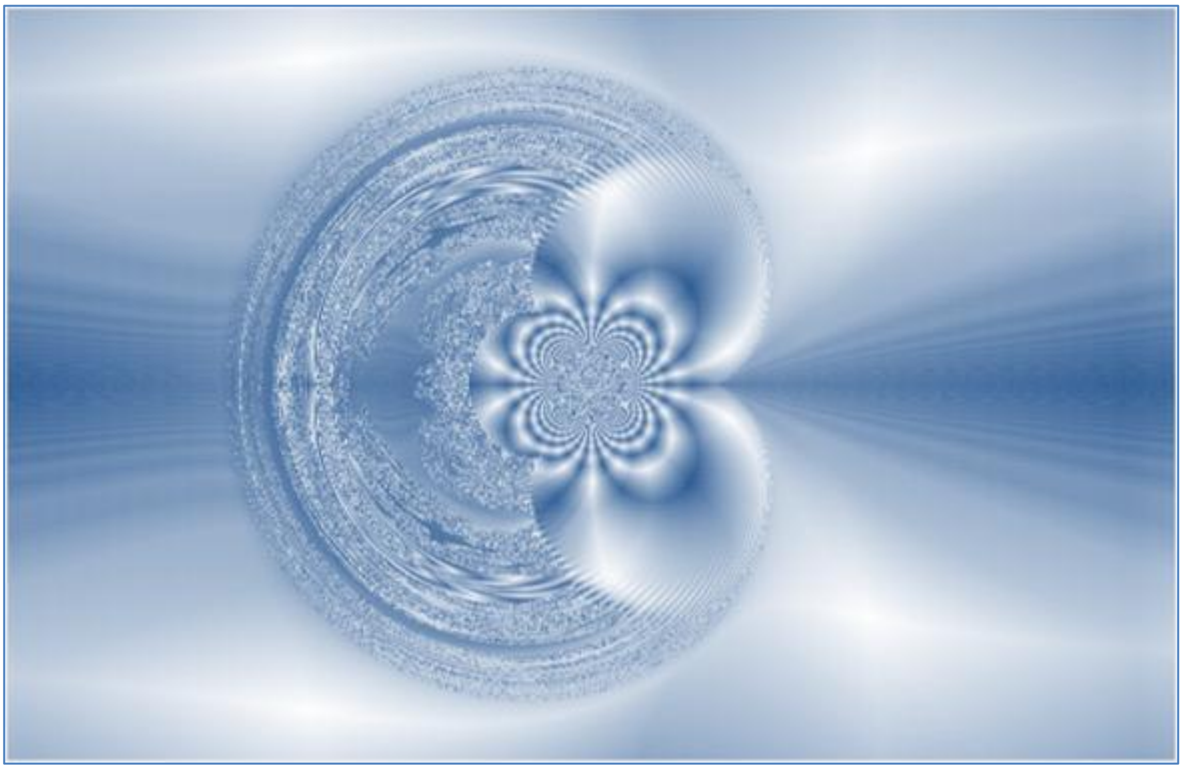


图 67

补充：

函数的迭代一节选自谢辅炬编写的《几何画板迭代全解》一书。原计算将例 18 用导数法求一元四次方程的近似实数根剔出本书，后来考虑到它提供的一种解方程的思路，便留下了。

本书在描述例 21 Mandelbrot sets（曼德布洛特集合）、例 22 Julia Sets（朱丽亚集）、例 23 牛顿迭代法三例时放宽了对矩形框的限制——当矩形框被限制时，就限制了对三种集合全貌的展示。有兴趣的板友，可以将矩形框更改为任意四边形（四个自由点为顶点）——精彩就在你的手中！

第 5 章 迭代进阶

在本章中，迭代类型不再按单映射迭代和多映射迭代来分类，而是依据例题中解决迭代关键性的步骤来分类，也可能按迭代所产生的效果来分类，也可能不分类，但可以保证，每一个例子都有独特的解决方案。当你每看完一个迭代实例后，你都会对迭代有更深一层的理解。

通过前几章的学习，我们知道迭代是通过两大步（“迭代元”和深度迭代）来实现的，在叙述上偏重于几何画板的操作。

而本章不同，在叙述上更偏重于迭代原理的分析，操作上的事儿能不说就不说，能少说就少说，有的详写、有的略写、有的不写，将其编为练习题、有的只有步骤，没有配图。也就是说，本章所选案例不一定详写全部原理或步骤。因为，作为读者的您，已经对迭代有了一定的了解。

在心理上，我们也要有所准备，一些案例，即便是按步骤一步一步实现，其中的原理还需要读者反复思考、揣摩。大量的变更各案例中的计算部分，您将有意外收获——失败和收获共存，成功和进步并存。

本章在讲解某些案例之前，会根据具体情况，补充一些定理及推论。本书不会对这些定理和推论展开论证，但会在脚注位置指明它的出处，供板友们后续学习。

第 1 节 几个常用的函数

1、abs(x)。求数 x 的绝对值。

$$\mathrm{abs}(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

2、sqrt(x)。求数 x 的算术平方根。

$$\mathrm{sqrt}(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \mathrm{x}>0\\ 0, & \mathrm{x}=0\\ \text{未定义}, & \mathrm{x}<0\end{cases}$$

3、ln(x)。求数 x 的自然对数值。

$$\ln(x)=\begin{cases}log_e^x, & \mathrm{x}>0\\ -\infty, & \mathrm{x}=0\\ \text{未定义}, & \mathrm{x}<0\end{cases}$$

4、log(x)。求数 x 的以 10 为底的对数值。

$$\log(x)=lg(x)=\begin{cases} log_{10}^{x}, & x>0 \\ -\infty, & x=0 \\ 未定义, & x<0 \end{cases}$$

5、sgn(x)。符号函数。

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

6、round(x)。四舍五入取整函数，也叫圆整函数。

直接去掉数 x 的十分位以后的数字，将十分位上的数字四舍五入到个位，其结果保留整数。

round(－1.5)=－1，round(－0.7)=－1，round(0.09)=0。

7、trunc(x)。截尾取整函数。

直接去掉数 x 的小数点以后的数字。trunc(－1.5)=－1，trunc(－0.7)=0。

例 24 回旋线①

作法：

1、新建参数 n=$\boxed{12}$，x=$\boxed{2}$，计算 x+1=3，

$$d=\frac{\operatorname{round}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{trunc}\left(\frac{x}{2}\right)}。$$

2、任取点 A，点 B。点 B 关于中心 A 旋转 90°，得点 B’。如图 68。

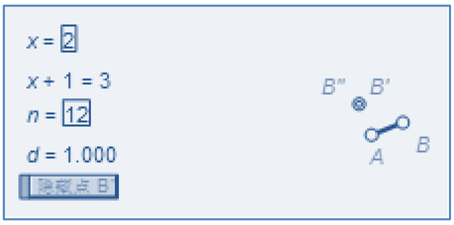


图 68

3、点 B’关于中心 A 缩放 d，得点 B”。连接 AB。

4、隐藏点 B’，选择点 B，点 A， x=$\boxed{2}$，n=$\boxed{12}$，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，(B，A，x)→(A，B”，x+1)，点击结构→仅保留非点类项，如图 69，按迭代按钮。效果如图 70。

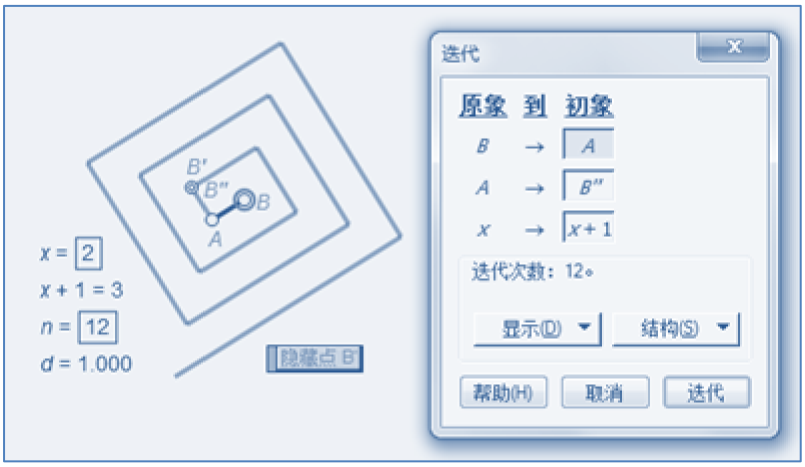


图 69

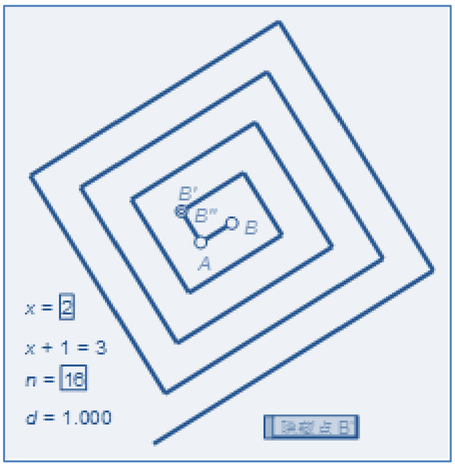


图 70

① 原创：钮炳坤。优化：方小庆。

第 2 节 迭代表格

例 25 表格(一)

原理：

用缩放变换实现表格的绘制。

作法：

1、点击【绘图➔网格样式➔矩形网格】，得直角坐标系 XOY。原点标签记为 O。x 轴上的单位点记为 X，y 轴上的单位点记为 Y。

选择点 O，点 X，点 Y。点击【编辑➔复制】，点击【编辑➔撤销构造坐标系】，点击【编辑➔粘贴】。点 O，点 X，点 Y，重新出现。

此时，点 X 和点 Y 脱离了坐标系。点 X 可以在经过点 O 的水平线的右边任意移动。点 Y 可以在经过点 O 的竖直线的上方任意移动。此法也有局限——点 X，点 Y 不是自由点。

2、新建 x=6，y=5。以点 O 为中心，点 X 缩放 x，得点 A；点 Y 缩放 y，得点 B。

连接 OA。选择点 O 和 y=5，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，O→Y，点击结构→仅保留非点类象，按迭代按钮。如图 71。隐藏线段 OA 及其迭代象。

图 71

连接 OB。选择点 O 和 x=6，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，O→X，点击结构→仅保留非点类象，按迭代按钮。如图 72。

图 72

显示线段 OA 及其迭代象。即得。如图 73。

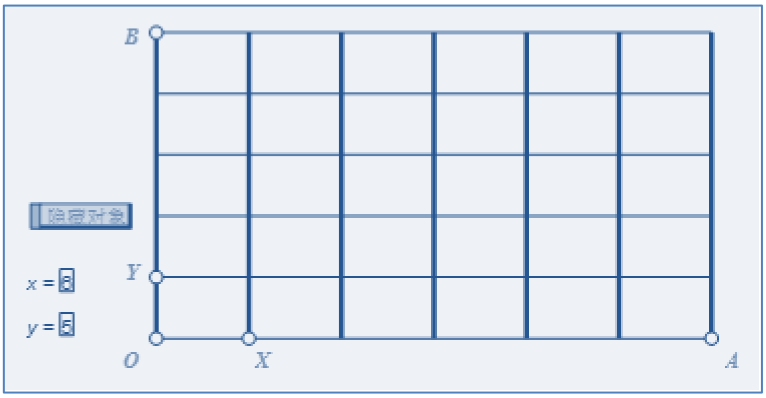


图 73

例 26 表格(二)

原理：

用缩放变换实现表格的绘制。

作法：

1、点击【绘图→网格样式→矩形网格】，得直角坐标系 XOY。原点标签记为 O。x 轴上的单位点记为 X，y 轴上的单位点记为 Y。

选择点 O，点 X，点 Y。点击【编辑→复制】，点击【编辑→撤销构造坐标系】，点击【编辑→粘贴】。点 O，点 X，点 Y，重新出现。

2、连接 OX，在其上任取点 A。选择点 O，点 A，点 X，点击【度量→比】，得 x_0=OX/OA，计算 $x_1 = \mathrm{trunc}(x_0)$。

连接 OY，在其上任取点 B。选择点 O，点 B，点 Y，点击【度量→比】，得 y_0=OY/OB，计算 $y_1 = \mathrm{trunc}(y_0)$。

隐藏线段 OX、线段 OY、点 X、点 Y。

3、以点 O 为中心，点 A 缩放 x_1，得点 C，连接 OC。

选择点 O 和 y_1，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，O→B，点击 结构 → 仅保留非点类象，按 迭代 按钮。如图 74。

隐藏线段 OC 及其迭代象。

图 74

以点 O 为中心，点 B 缩放 y_1，得点 D，连接 OD。

选择点 O 和x_1，按Shift键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，O→A，点击结构→仅保留非点类象，按迭代按钮。如图 75。

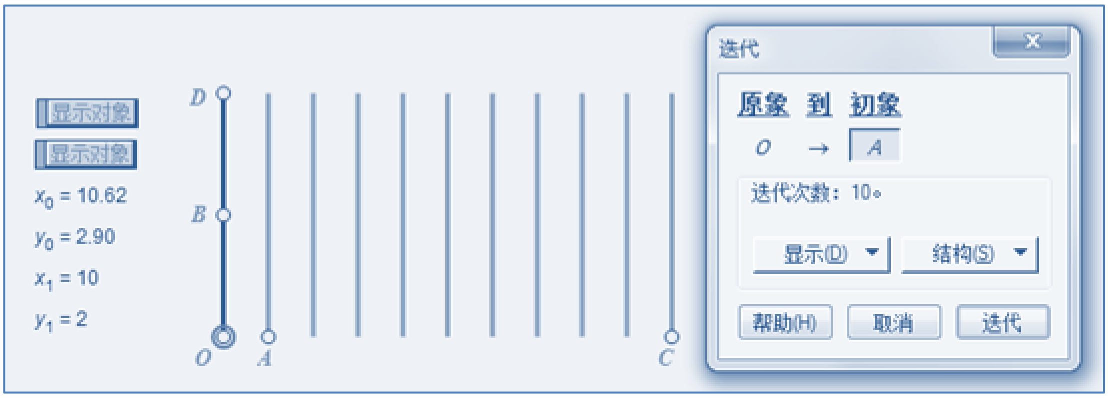


图 75

显示所有图元。即得。如图 76。

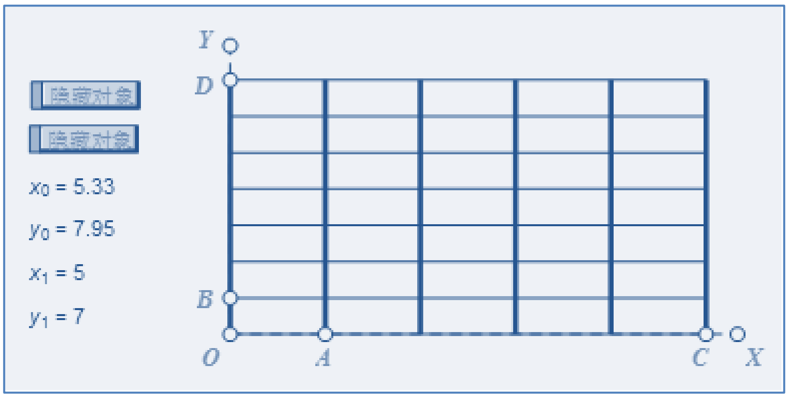


图 76

例 27 表格(三)

作法：

1、新建参数 n=11，t=9，计算 n+1=12，$\frac{n+1}{t}$。

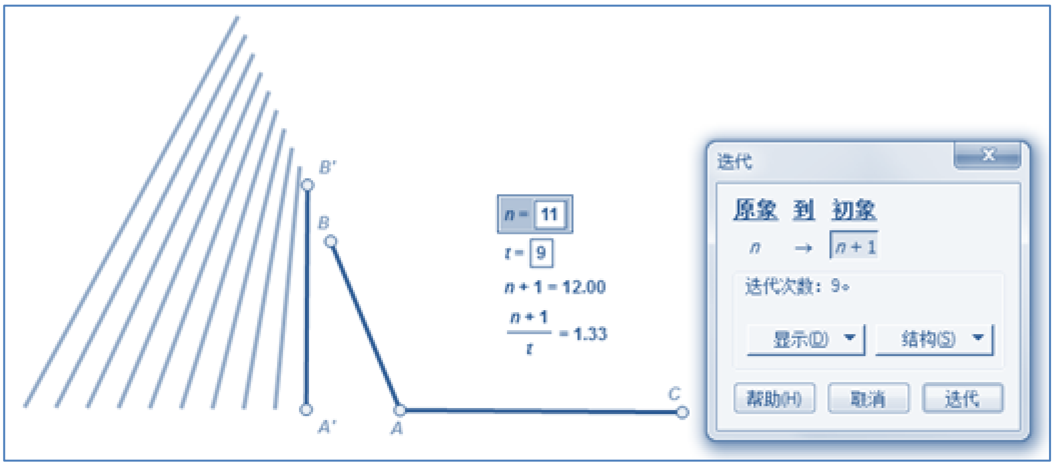


图 77

2、任取不共线三点 A，点 B，点 C。以点 C 为中心，点 A 缩放$\frac{n+1}{t}$，得点 A'；点 B 缩放$\frac{n+1}{t}$，得点 B'。连接 AB，AC，A'B'。

3、选择 n=11，t=9，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，n→n+1，点击结构→仅保留非点类象，不生成迭代数据表，按迭代按钮。如图 77。

4、令 n=−1，即得。如图 78。

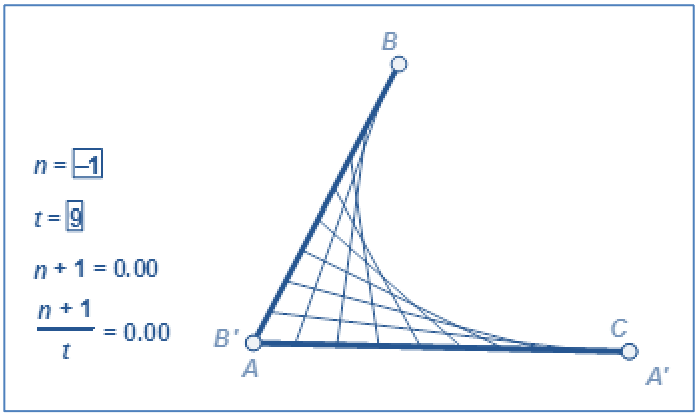


图 78

第 3 节 数轴的绘制

例 28 用迭代法制作数轴

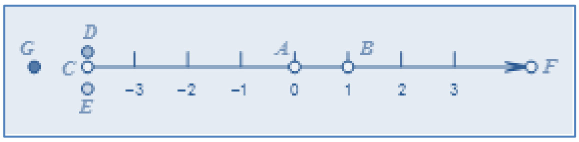


图 79

设想：

如图 79，我们想实现这样的效果：点 A 是数轴的原点，点 B 控制单位长度，点 D 控制刻度线的长短，点 E 控制刻度值的位置，点 G 控制箭头的大小。拖动点 C 时，数轴的负半轴上的刻度线和刻度值也随之出现；拖动点 F 时，数轴的正半轴上的刻度线和刻度值也随之出现。

我们怎么去实现它呢？可以考虑先迭代产生刻度线，再迭代产生刻度值，最后进行优化。

作法：

1、点击【绘图➔定义坐标系】，原点为点 A，单位点为点 B。隐藏网络和坐标轴。

2、选择点 A，点 B，点击【构造➔射线】，在此射线 *AB* 上任取点，记为点 F。

选择点 F,点击【度量➔点的值】,得 F在$\overrightarrow{AB}$上 = 4.47 ,计算 trunc(F在$\overrightarrow{AB}$上-1.4)=3.00,隐藏 F在$\overrightarrow{AB}$上 = 4.47 ,修改 trunc(F在$\overrightarrow{AB}$上 1.4)=3.00 的标签为 +X。它将作为数轴的正半轴的迭代参数。

3、将射线 AB 和点 B 绕点 A 旋转 180° 得射线 AB’和点 B’。在射线 *AB’*上任取点，记为点 C。

选择点 C,点击【度量➔点的值】,得 C在$\overrightarrow{AB'}$上 = 2.78 ,计算 trunc(C在$\overrightarrow{AB'}$上-1.4)=1.00,隐藏 C在$\overrightarrow{AB'}$上 = 2.78 ,修改 trunc(C在$\overrightarrow{AB'}$上 1.4)=1.00 的标签为 —X。它将作为数轴的负半轴的迭代参数。

4、将射线 AB、射线 AB’绕点 A，旋转 90° 得射线 m、射线 n。在射线 m 上任取点，记为点 M，连接 AM，将线形改为细线。在射线 n 上任取点，记为点 N。如图 80。

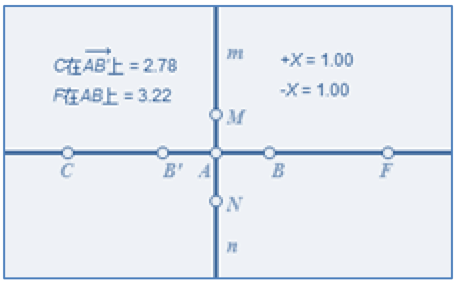


图 80

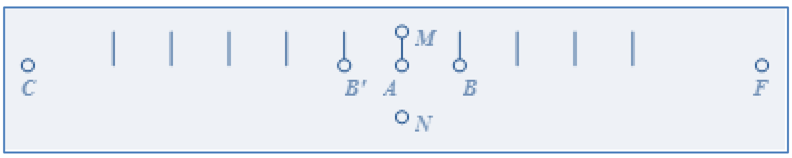


图 81

5、隐藏所有的射线。

6、选择点 A 和＋X，按Shift键，迭代|初象，点击结构→仅保留非点类象，不生成迭代数据表，A→B，按迭代按钮。如图 82（左）。

选择点 A 和－X，按Shift键，迭代|初象，点击结构→仅保留非点类象，不生成迭代数据表，A→B′，按迭代按钮。如图 82（右）。

这样的话，迭代刻度线的任务就完成了，如图 81。

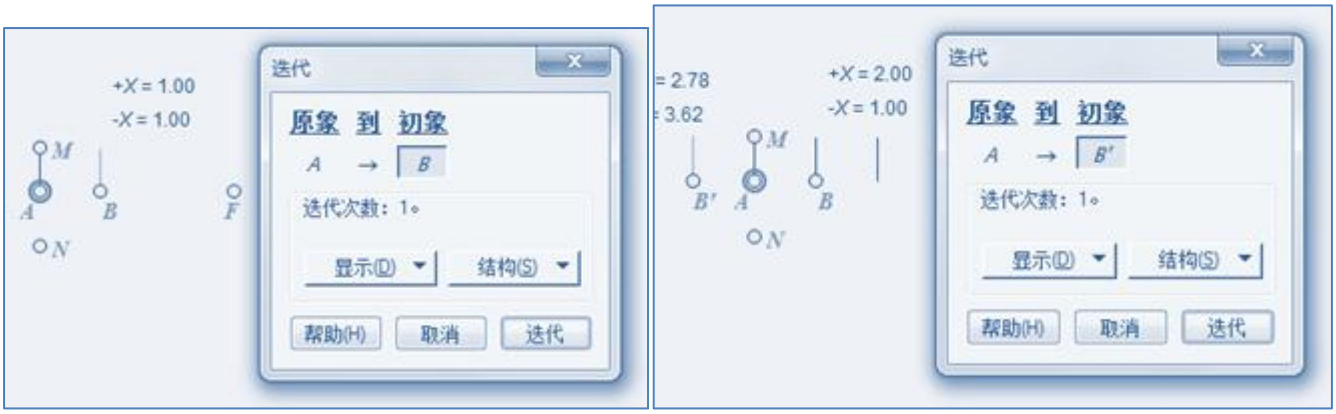


图 82

7、点 M 沿标记向量 A|C 平移得点 D。隐藏点 M。此时拖动点 D，可以实现刻度线的长短。

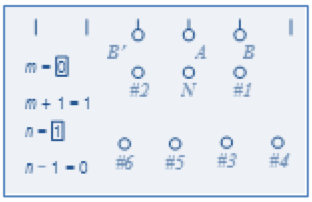


图 83

图 84

图 85

8、点 B 沿标记向量 A|N 平移得点#1；点 B′沿标记向量 A|N 平移得点#2。如图 83。

9、任取点#3，点#3 沿标记向量 N|#1 平移得点#4。任取点#5，点#5 沿标记向量 N|#2 平移得点#6。如图 83。

10、新建参数 m=$\boxed{0}$（正半轴刻度值），n=$\boxed{1}$（负半轴刻度值）计算 m+1=1，n-1=0。选择点#3，m+1=1，按$\boxed{\text{Shift}}$键，点击【编辑➔合并文本到点】，选择点#3，m=$\boxed{0}$和＋X，按$\boxed{\text{Shift}}$键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，(#3，m)➔(#4，m+1)，按$\boxed{\text{迭代}}$按钮。如图 84。

选择点#5，n-1=0，按$\boxed{\text{Shift}}$键，点击【编辑➔合并文本到点】，选择点#5，n=$\boxed{1}$和－X，按$\boxed{\text{Shift}}$键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，(#5，n)➔(#6，n-1)，按$\boxed{\text{迭代}}$按钮。如图 85。

现在，我们完成了迭代刻度值的任务。但很明显，这些刻度值还不在数轴的下方，同时它也不受点 N 控制。如图 86。

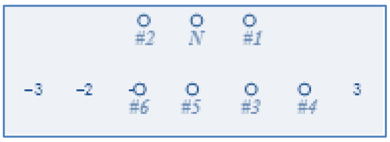


图 86

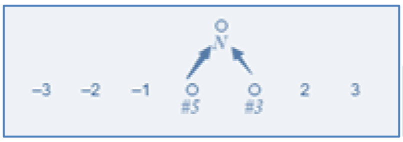


图 87

图 88

11、令 m=$\boxed{-1}$（请注意原来是 m=$\boxed{0}$），隐藏点#1、#2，#4，#6，合并点#3 到点 N，合并点#5 到点 N。合并前，如图 87，合并后，如图 88。

12、点 N 沿标记向量 A|C 平移得点 E。隐藏点 N 和点 B′。拖动点 E，可以控制刻度值的高低。

13、图形再需要添上带箭头的线段，数轴就制好了，如图 79。用点 G 控制箭头大小，这里不讲。

点评：

以上步骤制作的数轴是相当简单的数轴，优化空间相当大，比如数轴的正半轴上的刻度值和刻度线可以一次性完成，控制刻度的参数可以用一个参数来控制，可以设置数轴的初始值。有兴趣的板友可以试一试，仿此制作一个属于自己的平面直角坐标系。

不过，依此所作数轴不能创建为新工具。

数轴左右个端点还可以用参数直接控制，如图 89。

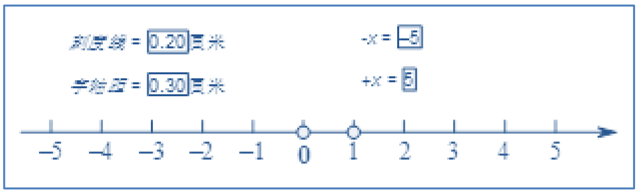


图 89

借此例，我想说明四件事儿：一、学习几何画板的过程是不断探索的过程，在探索的过程中实现对几何画板作品的不断优化。二、一个几何画板的作品，往往是若干个小作品的综合应用。在学习过程中就是把大作品折分成若干个小步骤，学习作者通过哪些技巧将这些小步骤组合在一起制作成了现在的作品。它们的组合巧妙吗，可不可以这样或那样组合，有没有更巧妙的组合技巧或方法。一个好的作品往往有很多种实现方案，那么哪种方案最好呢？在不断地探索尝试的过程中，我们总会有所思，有所得。三、学习几何画板的过程也是一个繁琐的过程，不断重复的过程，模仿与创新交织的过程。在重复与重复，模仿与创新之间，心情也会在沮丧和喜悦之间徘徊。无论沮丧的心情还是喜悦的心情，都是我们学习几何画板的心路历程，弥足珍贵。也正是这种弥足珍贵的心路历程的不断积累，才使我们懂得了感谢。感谢每一幅作品，每一位板友，每一次迭代，每一次结束和每一次开始。四、经过不断地探索，终于用自己的思路“创作”出了一部分迭代作品，数学思维也随之产生变化——对动态几何又有深一层的体验。在后续分析迭代作品

时，自觉不自觉地想到“动态”。说穿了，学习几何画板就是为了学数学；琢磨几何画板的过程其实就是琢磨数学的过程。我们应该享受这个琢磨数学的过程。我们既然选择了享受，就不言放弃。

第 4 节 同余表

定理 1 带余数除法[1] 设 a，b是两个给定的整数，$b\neq 0$，那么，一定存在惟一的一对整数 q与 r，满足

$$a=qb+r,\quad 0\leqslant r<|a|。$$

此式的另一种表达是读小学时所学的除法

$$a\div b=q\ \cdots\ r,$$

其中，a叫做被除数，b叫做除数，q叫做商，r叫做余数。

推论 若

$$\begin{cases}a_1\div b=q_1\ldots r\\ a_2\div b=q_2\ldots r\end{cases}$$

则称a_1和a_2有对除数 b来说有相同的余数 r，记为$a_1\equiv a_2\ (\bmod b)$（a_1，a_2对模 b同余）。

例 29 用带余数除法创建同余表

下表是 n÷4 的同余表，同一列上的数字，有 1≡5≡9≡13（mod 4），其余数是 1。试问，n=2014 时，它在下表中的哪个位置？怎么去动态演示它？

（(0,1)➔0×4+1=1，(1,1)➔1×4+1=5，(2,1)➔2×4+1=9，(3,1)➔3×4+1=13）

余数 商	r=0	r=1	r=2	r=3
q=0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)
q=1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
q=2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(3,3)
…	…	…	…	…

作法：

1、新建参数 a=$\boxed{17}$（被除数），b=$\boxed{4}$（除数），计算 q=trunc(a/b)（商）和 r=a−bq（余数）。

2、新建参数 c=$\boxed{2.30}$厘米（控制水平距离）、d=$\boxed{1.20}$厘米（控制垂直距离）。计算 x=cr、y=−dq。

3、新建点 A，将点 A 沿直角坐标（x，y）平移后得点 A'。

① 详见《初等数论（第二版）》（潘承洞、潘承彪编写，北京大学出版社，2003 年 1 月第二版，2009 年 12 月第 8 次印刷），第 20 页。

4、新建热文本“(*q*，*r*)”（*q*=trunc(a/b)，*r*=a−bq），此时，文本会变为(4，1)，鼠标指向“4”时 q=4 会被红色方框框起来；鼠标指向“1”时 r=1 也会被红色方框框起来。

5、选择点 A'和文本(4，1)，按 Shift 键，点击【编辑→合并文本到点】。此时，点 A'上会出现文本框，如图 90。

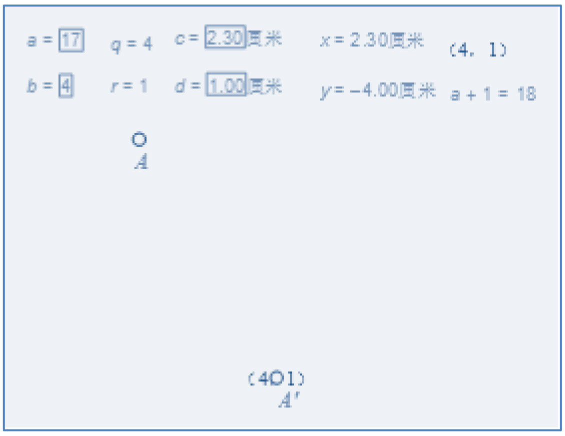


图 90

6、令 a=0（原来是 a=17，当把 a 的值改为 0 时，点 A'与点 A 重合），隐藏点 A 和点 A'，并计算 a+1=1。

7、新建参数 n=17（迭代参数）。

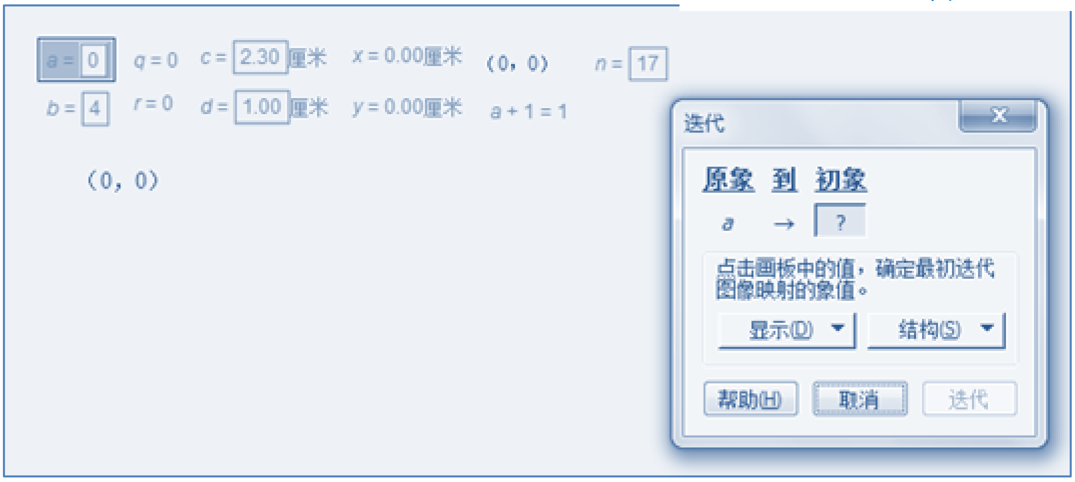


图 91

8、选择 a=0 和 n=17，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，如图 91，a→a+1，如图 92，点击结构→生成迭代数据表，按迭代按钮。

图 92

9、选择 n=17，按数字键盘上的 ＋ 键或 － 键，观察迭代象的变化。

点评：

这个例子中应用的带余数除法可以解决一系列迭代案例，它是最基础的迭代案例之一。上例中若不选择第 3 步中的“点 A′和文本（4，1）”而选择“点 A′和 a+1=1”，按 Shift 键，点击【编辑→合并文本到点】。此时，选择 a=0 和 n=17，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，a→a+1，点击结构→生成迭代数据表，按迭代按钮，可以出现如图 93 的结果。在这个结果中，我们更容易看清此案例迭代的实质。

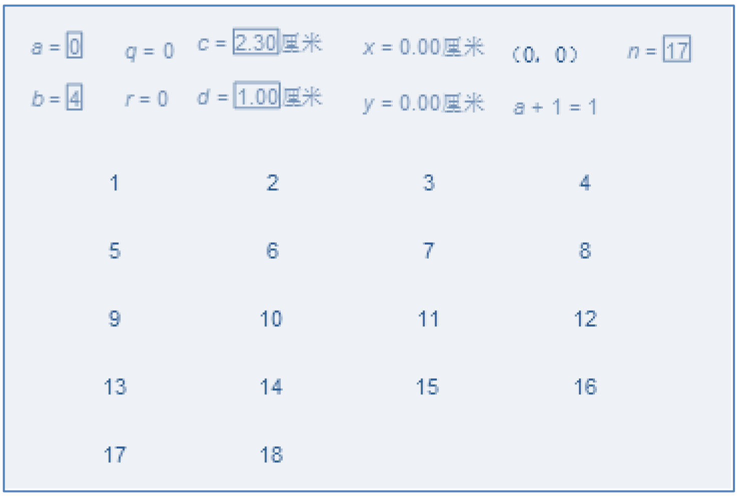


图 93

例 30 密铺四边形(二)[①]

效果：如图 94，四边形 ABCD，其顶点为自由点。b 控制列，n 控制四边形的个数。四边形的颜色间隔变化。

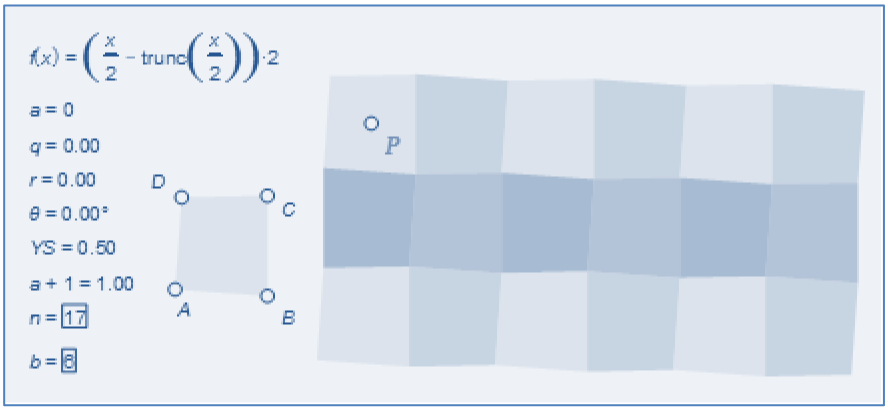


图 94

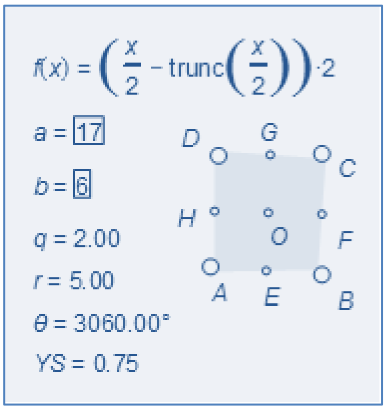


图 95

此例同时考虑到例 13 密铺四边形(一)中出现过的问题。

作法：

一、基础工作

1、新建奇偶函数

$$f(x)=\left(\frac{x}{2}-\mathrm{trunc}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\times 2,$$

其目的为：

① 此例作者：方小庆。

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{x 为偶数;}\\ 1, & \text{x 为奇数。}\end{cases}$$

2、新建参数 a=$\boxed{17}$，b=$\boxed{6}$，计算

$$q=\operatorname{trunc}\left(\frac{a}{b}\right),\quad r=a-bq,$$

$$\theta=\left(a+f(a)\times f(b+1)\right)\times 180°,$$ ①

θ 在几何画板标签栏输入{theta}即可。计算

$$\mathrm{YS(Yan'Se)}=\frac{\frac{f(a)}{2}+\left(1-f(q)\right)}{2}。$$

二、绘制颜色由参数控制的四边形

3、任取四点 A，点 B，点 C，点 D。

4、以点 B 为中心，点 A，点 C 缩放 50%，得点 E，点 F；以点 D 为中心，点 A，点 C 缩放 50%，得点 G，点 H。以点 H 为中心，点 F 缩放 50%，得点 O。

5、选择点 A，点 B，点 C，点 D，点击【构造→四边形的内部】，得四边形 ABCD。如图 95。

6、以 O 为中心，四边形 ABCD 旋转 θ，得四边形#1，隐藏四边形 ABCD。如图 96。

图 96

7、选择四边形#1 和 YS = 0.75，点击【显示→颜色→参数】，按$\boxed{\text{确定}}$按钮。

此时，得到了新的四边形#2，并且隐藏四边形#1。如图 97。四边形#2 便受参数 YS=0.75 控制。

三、深度迭代

8、任取点 K。点 K 沿标记向量 H|F 平移得点 M，点 K 沿标记向量 G|E 平移得点 N。

9、以点 K 为中心，点 M 缩放 r，得点 M'，点 N 缩放 q，得点 N'。

10、点 M'沿标记向量 K|N'平移得点 P。

① 本题另解（潘建平提供）：$\theta=(q+r)\times 180°$，$\mathrm{YS}=\frac{(-1)^{q+r}+1}{4}$。

图 97

11、将四边形#2 沿标记向量 O|P 平移得四边形#3。

12、选择四边形#3 和 YS = 0.75，点击【显示→颜色→参数】，按确定按钮，得四边形#4，隐藏四边形#3。此时四边形#2 和四边形#4 颜色一样。如图 98。

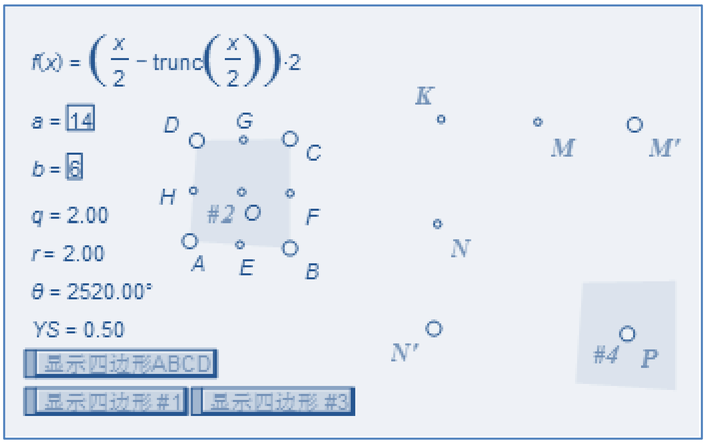


图 98

13、新建参数 n=17，令 a=0，计算 a+1=1，选择 a=0，n=17，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，a→a+1，按迭代按钮。删除多余的迭代象和生成的迭代数据表。隐藏不必要的点和标签。其效果见图 94。

小结：

本例中，你是否有所感悟？迭代过程中若涉及旋转变换问题怎么解决？是在迭代之前解决掉还是迭代过程中实现？有一个开关函数还记得吗？它和 sgn(x)函数一样吗？

我们对比例 13 密铺四边形㈠和例 30 密铺四边形㈡可以发现：例 30 密铺四边形㈡中首先找到任意四边形 ABCD 的中心 O，然后用参数实现对其旋转角度的控制和颜色的控制，最后才平移到点 P，实现最后的迭代。也就是说，本例在处理带有旋转角度的迭代时，优先处理了旋转角度的问题，然后再去迭代。

还有比它更简单的方法，你想到了吗？（答案就在书中。）

例 31 数阵

作法：

1、任取点 O 沿极坐标（0.2 厘米，0°）平移得点 O'。作射线 OO'，在其上取点 R。将射线绕点 O 旋转 −90° 得射线 *l*，在其上取点 Q。隐藏两条射线和点 O'。

2、新建参数 a=$\boxed{14}$，b=$\boxed{6}$，n=$\boxed{14}$。计算$q = \text{trunc}\left(\frac{a}{b}\right)$，$r = a - bq$。计算$x = ((q - 2 \times \text{trunc}\left(\frac{q}{2}\right)) \times (\text{b} - 1) + (-1)^q \times r$。计算 a+1=15。

3、以点 O 为中心，点 R 缩放 *x*，得点 X。点 Q 缩放 *q*，得点 Y。点 Y 沿标记向量 O|X，得点 P。如图 99。

4、选择点 P 和 a+1=15，按 $\boxed{\text{Shift}}$键，点击【编辑→合并文本到点】，隐藏所有的点。

5、令 a=$\boxed{0}$，n=$\boxed{14}$，按 $\boxed{\text{Shift}}$键，点击【变换→深度迭代】，迭代|$\boxed{\text{初象}}$，a→a+1，按$\boxed{\text{迭代}}$按钮。如图 100。

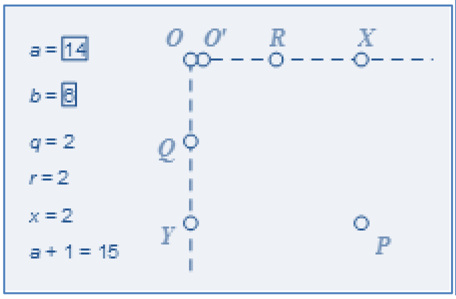


图 99

图 100

补充：

式子$q - 2 \times \text{trunc}\left(\frac{q}{2}\right)$在本例中起到什么作用？为什么它要乘以(b − 1)而不是 b。试着将 x 改为下列计算中的任意一个，看看迭代象会出现什么样的情况？

①$x = ((q - 2 \times \text{trunc}\left(\frac{q}{2}\right)) \times \text{b}$；②$x = (-1)^q \times r$；③$x = ((q - 2 \times \text{trunc}\left(\frac{q}{2}\right)) \times \text{b} + (-1)^q \times r$。

例 32 月历表[1]

设想：

如图 101，修改 Y（Year）=$\boxed{2014}$和 M（Month）=$\boxed{5}$的值，自动出现 2014 年 5 月的月历。

图 101

思考：

1、月历是年历的一部分。制作月历实再上就是制作年历。年份分为“平年”和“闰年”，平年有 365 天，闰年有 366 天。（易知每 400 年中只有 97 个闰年。）

2、如何判断年份是“平年”还是“闰年”，需满足下列条件：

① 本例作者：方小庆。

凡是能够被 400 整除的年份是闰年。（如 1200 年、1600 年、2000 年等。）

凡是不能够被 100 整除，但能够被 4 整除的年份也是闰年。（如 1980 年、1984 年、1996 年、2012 年等。）

凡是能够被 100 整除但不能被 400 整除，或不能被 4 整除的年份是平年。（如 1900 年、1986 年、1995 年、2001 年等。）

3、一年有 12 个月，分“大月”和“小月”，大月有 31 天，小月（除二月份外）有 30 天。一年中大月有 1 月、3 月、5 月、7 月、8 月、10 月、12 月，小月有 2 月、4 月、6 月、9 月、11 月。

4、闰年的二月为 29 天，平年的二月为 28 天。

5、如何确定每月月首是星期几？我们用年前天数与月前天数的和除以 7 的余数来判断每月月首的星期数。（如 2014 年 5 月 1 日，年前天数=735233，月前天数 121，所以（735233+121）÷7=105050...4。所以 2014 年 5 月 1 日是星期四。年前天数和月前天数的计算写作法时会说。）

余数	0	1	2	3	4	5	6
星期	天	一	二	三	四	五	六

作法：

一、闰年及年前天数

1、新建 Y=$\boxed{2014}$，M=$\boxed{5}$，新建整数/小数判断函数

$$f(x)=1-\mathrm{sgn}\big(x-\mathrm{trunc}(x)\big)。$$

它相当于

$$f(x)=\begin{cases}1，x为整数；\\0，x为小数。\end{cases}$$

那么，

$$f\left(\frac{x}{4}\right)=\begin{cases}1，\quad x能被4整除；\\0，x不能被4整除。\end{cases}$$

$$f\left(\frac{x}{100}\right)=\begin{cases}1，\quad x能被4整除；\\0，x不能被4整除。\end{cases}$$

$$f\left(\frac{x}{400}\right)=\begin{cases}1，\quad x能被400整除；\\0，x不能被400整除。\end{cases}$$

2、计算闰年和年份天数（也就是年前天数）：

$$闰年=f\left(\frac{Y}{4}\right)\times\left(1-f\left(\frac{Y}{100}\right)+f\left(\frac{Y}{400}\right)\right)$$

$$年份天数=(Y-1)\times 365+\mathrm{trunc}\left(\frac{Y-1}{4}\right)-\mathrm{trunc}\left(\frac{Y-1}{100}\right)+\mathrm{trunc}\left(\frac{Y-1}{400}\right)$$

二、建立模拟数组实现月份控制（x 轴表示月份，y 轴表示天数）。

3、在**平面直角坐标系**（点击【绘图➔网格样式➔矩形网格】）内绘制下列各点

月份	-1	0	1	2	3	4	5	6
天数	0	0	31	28	31	30	31	30
坐标	N(-1,0)	Q(0,0)	A(1,31)	B(2,59)	C(3,90)	D(4,120)	E(5,151)	F(5,181)
月份	7	8	9	10	11	12	13	
天数	31	31	30	31	30	31	31	
坐标	G(7,212)	H(8,243)	I(9,273)	J(10,304)	K(11,334)	L(12,365)	M(13,365)	

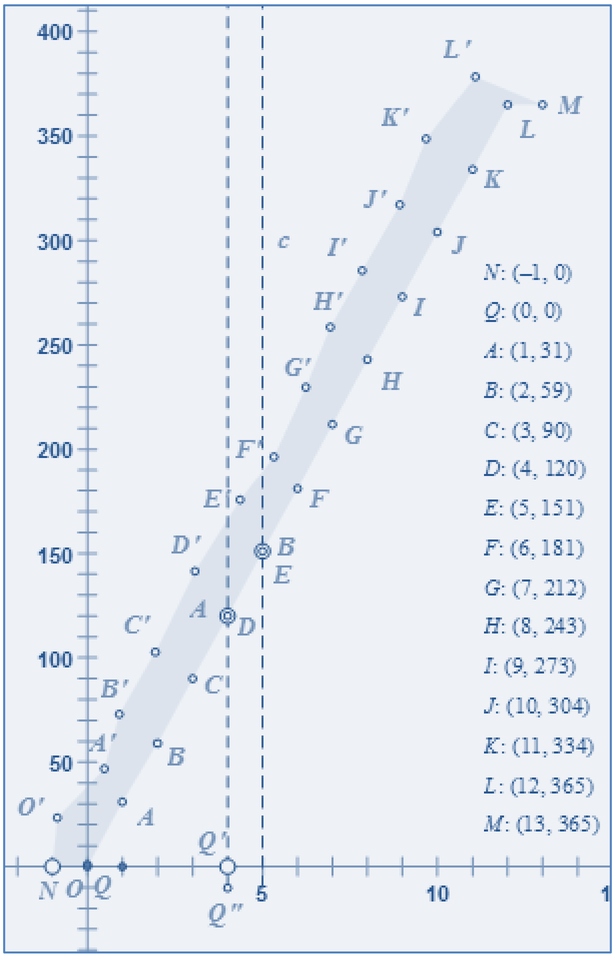


图 102

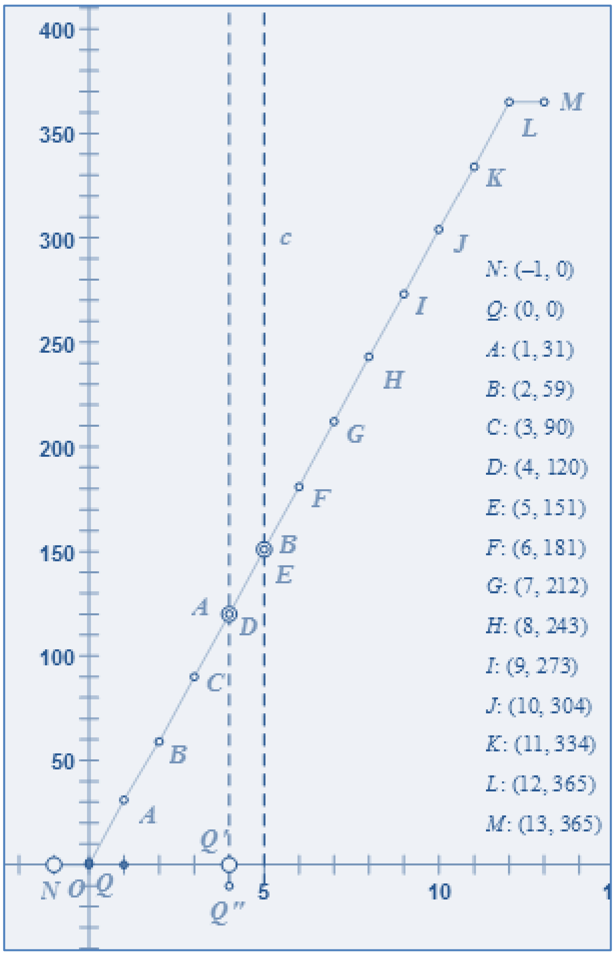


图 103

4、在点 Q 至点 L 的左上侧绘制自由点 O’，点 A’，点 B’，点 C’，点 D’，点 E’，点 F’，点 G’，点 H’，点 I’，点 J’，点 K’，点 L’。

5、选择点 N，点 Q，点 A，点 B，点 C，点 D，点 E，点 F，点 G，点 H，点 I，点 J，点 K，点 L，点 M，点 L’，点 K’，点 J’，点 I’，点 H’，点 G’，点 F’，点 E’，点 D’，点 C’，点 B’，点 A’。点击【构造➔多边形内部】。如图 102。

6、以点 N 为中心，点 Q 缩放 M=$\boxed{5}$，得点 Q’。

7、点 Q’极坐标平移（0.3 厘米，－90° ）得点 Q’’。

8、作射线 Q''Q'。选择射线 Q''Q'和第 5 步中所制作的多边形，点击【构造➔第一个交点】，得点 A。

9、射线 Q''Q'沿标记向量 N|Q 平移得射线 c。

10、选择射线 c 和第 5 步中所制作的多边形，点击【构造➔第一个交点】，得点 B。

11、度量点 A，点 B 的纵坐标，得 $y_A = 120$，$y_B = 151$，并对其值进行修正 $\text{round}(y_A) = 120$，$\text{round}(y_B) = 151$。这是因为，交点的计算和坐标的度量，都会产生微小的误差，会在后续的 trunc(x)函数中被误截小数。所以要用 round(x)函数加以圆整。

12、合点 O'到点 Q，合点 A'到点 A，……，合点 K'到点 K，合点 L'到点 L。如图 103。

13、隐藏点 A，点 B，……，点 K，点 L，点 M。

14、隐藏图 103 中的所有图元。

三、计算当月天数、月前天数和星期

$$当月天数 = \text{round}(y_B) - \text{round}(y_A) + (1 - \text{sgn}(|M-2|)) \times 闰年 - 1$$

$$月前天数 = \text{round}(y_A) + 1 + \text{sgn}(M-1) \times \text{sgn}(M-2) \times 闰年$$

$$星期 = \text{trunc}\left(\left(年份天数 + 月前天数\right) - \text{trunc}\left(\frac{年份天数 + 月前天数}{7}\right) \times 7\right)$$

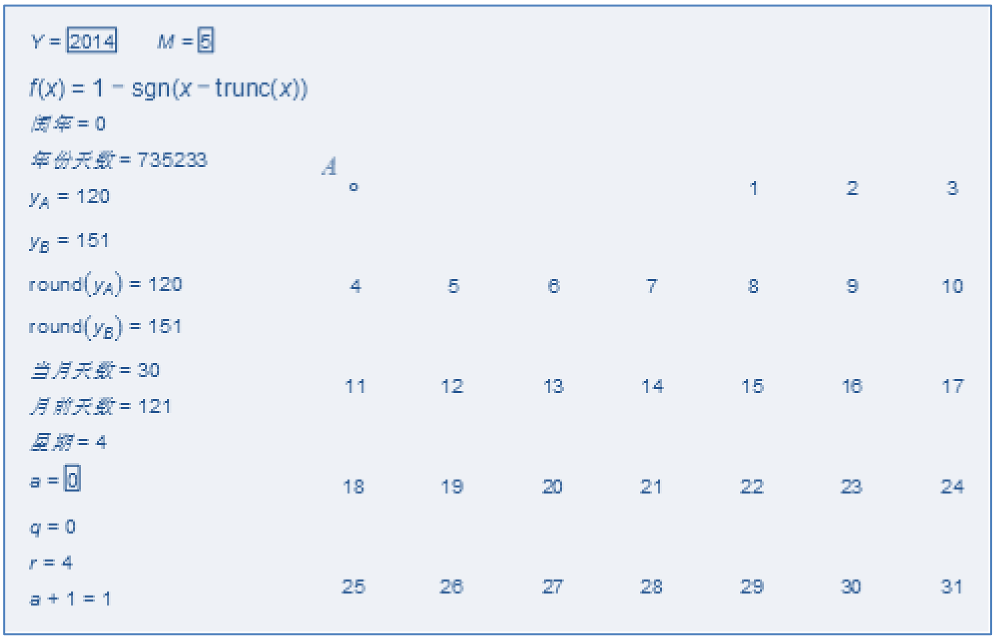


图 104

四、深度迭代

15、新建参数 a=$\boxed{16}$，计算 a+1=17，计算

$$q = \text{trunc}\left(\frac{a + 星期}{7}\right),\quad r = \left(a + 星期\right) - 7q。$$

16、用画点工具绘制点 A（与前面所有的点 A 不重合）。

17、点 A 沿极坐标（1.52 厘米，0°）平移得点 B。以点 A 为中心，点 B 缩放 q，得点 D。

18、点 A 沿极坐标（1.52 厘米，－90°）平移得点 C。以点 A 为中心，点 C 缩放 r，得点 E。

19、点 E 沿标记向量 A|D 平移得点 P。

20、选择 a+1=17 和点 P，按 Shift 键，点击【编辑➔合并文本到点】，隐藏点 B，C，点 D，点 E，点 P。

21、令 a=0，选择 a=0 和*当月天数*，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|**初象**，a→a+1，按迭代按钮。其效果图如图 104。

五、后期完善

22、接下来，我们对图 104 进一步完善。

23、选择合并在点 P 上的文本，字体选择 Arial 并加粗，字号选择 30 号，颜色选择黑色。

24、新建文本，输入“日　一　二　三　四　五　六”，字体选择**黑体**并加粗，字号选择 28 号，颜色选择红色。

25、点 A 沿直角坐标（1.52×3，1.52）得点 A’。将上述文本合并到点 A’。隐藏点 A’和上述文本。

26、点 A 沿直角坐标（1.52×3，1.52×2）得点 A”。将 M=5 合并到点 A”。隐藏点 A 点 A”。

27、选择合并在点 A”上的文本，字体选择 Arial 并加粗，字号选择 240 号，颜色选择浅灰色。

28、选择 Y=2014，M=5，字体选择**黑体**并加粗，字号选择 28 号，颜色选择黑色，使其醒目即可。效果图如图 101。即得。

小结：

1、通过此例，我们对 round(x)、trunc(x)和 sgn(x)有了更深的认识。我们甚至高兴地说我们学会了自定义一些有用的函数，如 $f(x) = 1 - \mathrm{sgn}\big(x - \mathrm{trunc}(x)\big)$。

2、利用射线对多边形的“扫描”所形成的模拟数组实际上是建立了 12 组数据开关。

3、例 29 中点 A’的变化由平移变换所得。例 30 中的点 P 和例 32（第 19 步）中的点 P 又是通过缩放变换所得。采用不同的方案实现同一种效果。

4、对于初学者，关键是理解商和余数循环规律、缩放的原理以及数组的通项公式。

第 5 节 素数表

定义 1[①] 设 a，b 是任意两个整数，其中 $b\neq 0$，若存在一个整数 q 使得等式 $a=bq$ 成立，我们就说 b 能整除 a 或 a 被 b 整除，此时我们把 b 叫做 a 的约数（或因数）。

若 $a=bq$ 里的整数 q 找不到，我们就说 b 不能整除 a 或 a 不被 b 整除。

定义 2 设整数 $p\neq 0$，且 $p\neq \pm 1$。如果它除了 ± 1，$\pm p$ 外没有其他约数，那么 p 就称为素数（或质数）。否则 p 就称为合数。

推论 1 1 既不是素数也不是合数。

推论 2 当 $p\neq 0$，且 $p\neq \pm 1$ 时，$\pm p$ 同时为素数或合数。

所以，不作特别说明，素数总是指正的素数，合数也总是指正的合数。所以，2 是最小的素数。4 为最小的合数。

推论 3[②] 若 a（$a\geqslant 4$）为合数时，存在一素数 p 能整除 a，而 $p\leqslant \sqrt{a}$。

我们知道，素数在正整数列中的分布情形是很不规则的。但在另一方面，我们根据素数的定义和性质，可以造出一部分素数表来以供应用。

任给一个正整数 N，可以按照下述方法求出一切不超过 N 的素数：把不超过 N 的一切正整数按大小关系排成一串

$$1，2，3，4，\cdots，N$$

首先划去 1，第一个留下的是 2，它是一个素数：

$$\underline{1}，2，3，4，5，6，7，8，9，10，\cdots，N$$

其次，从 2 起每隔一位划去一个数，这样就划去了除 2 外的 2 的一切倍数，

$$\underline{1}，2，3，\underline{4}，5，\underline{6}，7，\underline{8}，9，\underline{10}，\cdots，N$$

然后，从 3 起每隔两位划去一个数，这样就划去了除 3 外的 3 的一切倍数，

……

如此下去，所划掉的都是合数，第一个留下的数都不是比它小的素数的倍数，因此，留下的数总是素数。用这种方法可以逐一地把素数求出来。这种方法是希腊时代埃拉托斯特尼（Eratosthenes）发明的，它好像用筛子筛出素数一样，所以称为埃拉托斯特尼筛法。

显而易见，当 N 变大时，埃拉托斯特尼筛法的计算量也随之增大。造出比 N 小的素数表实际上就是判断比 N 小的数当中哪些是素数。

那么，如何判断一个数是素数还是合数呢？

---

① 和素数相关的内容，可参阅《初等数论（第三版）》（闵嗣鹤　严士健　编，高等教育出版社，2003 年 7 月第 3 版，2003 年 7 月第 1 次印刷），第 1 页—第 19 页。

② 详见详见《初等数论（第二版）》（潘承洞、潘承彪编写，北京大学出版社，2003 年 1 月第二版，2009 年 12 月第 8 次印刷），第 10 页。

推论 4 对于大于 2 的奇数 r，如果在 $2\sim\sqrt{r}$的范围内没有奇数约数，那么它即为素数，否则是合数。

表格 1

n	r	$\sqrt{r}$	约数（不超过$\sqrt{r}$）	奇约数的个数 $(2x+1\leqslant\sqrt{r})$	$x=\frac{\sqrt{r}-1}{2}$	$t=\mathrm{trunc}(x)$
0	3	1.73	—	0	0.37	0
1	5	2.24	2	0	0.62	0
2	7	2.65	2	0	0.82	0
3	9	3	2，3	1	1	1
4	11	3.32	2，3	1	1.16	1
5	13	3.61	2，3	1	1.30	1
6	15	3.87	2，3	1	1.44	1
7	17	4.12	2，3，4	1	1.56	1
8	19	4.36	2，3，4	1	1.68	1
9	21	4.58	2，3，4	1	1.79	1
10	23	4.80	2，3，4	1	1.90	1
11	25	5	2，3，4，5	2	2	2
12	27	5.20	2，3，4，5	2	2.10	2
13	29	5.39	2，3，4，5	2	2.19	2
14	31	5.57	2，3，4，5	2	2.28	2
15	33	5.74	2，3，4，5	2	2.37	2
16	35	5.92	2，3，4，5	2	2.46	2
17	37	6.24	2，3，4，5，6	2	2.62	2
…	…	…	…	…	…	…

由上表可以看出，我们实际上用$t=\mathrm{trunc}(\frac{\sqrt{r}-1}{2})$来表示不超过 $\sqrt{r}$ 奇约数的个数。当 r 越大，t 的误差也越大，但不会影响对数 r 是素数还是合数的判断。

例如，当 r=4725 时，$4725=3^3\times5^2\times7$，奇约数的个数应为$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$个，而 t=33，奇约数的个数误差为 33－24=9 个。

例 33 素数表[①]

作法：

一、数 r 是素数还是合数

① 本例原创：钮炳坤。初稿整理：高峻清。知识指导：潘建平、何万程。

1、新建参数 r=3（任意奇数），计算 r+2=5，保证在迭代过程中每个 r 值都为奇数。

2、新建参数 t_0=3（约数），计算 t_0+2=5，保证在迭代过程中每个约数都为奇数。

n	t_0+2	p	$S_0 \cdot p$
0	5	0	0

图 105

3、新建参数 S_0=1（用来储存 n 项数列前(n-1)数列的积），计算 $t_1=\frac{\sqrt{r}-1}{2}$（t_0的重复计算次数，迭代次数），$p=\operatorname{sgn}\left(r-t_0\times\operatorname{trunc}\left(\frac{r}{t_0}\right)\right)$（约数与否，当 t 为 r 的约数时，p=0；当 t 不是 r 的约数时，p=1），$S_0\times p$。

4、选择 t_0=3，S_0=1 和 t_1，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，$(t_0, S_0)\to(t_0+2, S_0\times p)$，按迭代按钮。此时会产生一个迭代数据表，如图 105。

这样就迭代出了 t 取 2～$\sqrt{r}$ 范围内的奇数时，所有 p 值的积 $S_0\times p$。

如果 r 在 t 取 2～$\sqrt{r}$ 范围内没有任何一个奇数约数，那么所有 p 值的积 $S_0\times p$ 才为 1；否则积就为 0。现在这个积 $S_0\times p$ 出现在了迭代数据表中，这正是我们在例 6 等差数列㈡遇到的问题：迭代数据表中的数据不能参与计算。当时试图利用迭代数据表绘制出相应的点，可当我们在平面直角坐标系中绘制出这些散点后发现——这些散点根本不受迭代数据表的控制——它们失控了。

怎么办呢？只能放弃本次迭代，另寻它法。（注意下边还是第 4 步：“4、”）

4、任取点 A。点 A 沿极坐标（0.2 厘米，0°）平移得点 A'。

5、作射线 AA'，在其上取点 B。隐藏点 A，点 A'和射线 AA'。

6、以点 A 为中心，点 B 缩放 $S_0\times p$，得点 B'。隐藏点 B。

7、选择 t_0=3，S_0=1 和 t_1，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，$(t_0, S_0)\to(t_0+2, S_0\times p)$，点击结构➔生成数据迭代表，按迭代按钮。隐藏点 B'。

8、令 r=23，选择生成的迭代象，点击【变换➔终点】，得点 C。隐藏迭代象。

9、显示点 A，点 B，框选点 A，点 B，点 C（框选时，几何画板默认按创建顺序选择），点击【度量➔比】，得 $\text{sushu}=\frac{AC}{AB}$。

$\text{sushu}=\frac{AC}{AB}$ 就是我们迫切想要的所有 p 值的积 $S_0\times p$。

10、将 r 的值还原为 r=3。

通过以上 10 步，我们实现了对数 r 是素数还是合数的判断。

二、统计素数 r 是第几个素数

11、新建参数 S=0（S 用来储存一个 n 项数列前(n－1)项的和），计算 k。

$$k=\operatorname{sgn}(\text{sushu})+\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(3.5-\mathrm{r})+1\right)$$

此时，若 r＞3 的奇数时，$\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(3.5-\mathrm{r})+1\right)=0$，r＝3 时，$\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(3.5-\mathrm{r})+1\right)=1$，这要多个 1，是因为把质数 2 也要算上。这里的 3.5 可以换成整数部分为 3 的任一有限小数。

12、计算 S＋k。后面迭代时，就 S＋k 就是所有 k 的和，和是多少，r 就是第几个质数。

三、制表

13、新建参数 a=605（总范围），b=6（每行个数），计算$y = \mathrm{trunc}\left(\frac{S+k}{b}\right)$，$x = (S+k) - b \times y$。

14、任取点 D。点 D 沿极坐标（0.2 厘米，0° ）平移得点 D’。

15、作射线 DD‘，在其上取点 E。隐藏点 D’和射线 DD’。点 E 控制列宽。

16、点 D 沿极坐标（0.2 厘米，－90° ）平移得点 D‘’。

17、作射线 DD‘’，在其上取点 F。隐藏点 D’’和射线 DD’’。点 F 控制行宽。

18、令 S=20。以点 D 为中心，点 E 缩放 x，得点 E’，点 F 缩放 y，得点 F’。

19、点 F’沿标记向量 D|E‘平移，得点 P。如图 106。隐藏点 D，点 E，点 F，点 E’，点 F’。

20、令 S=0。计算 r·1（迭代时，此值随动，精确度为单位），$\frac{1}{k}$。

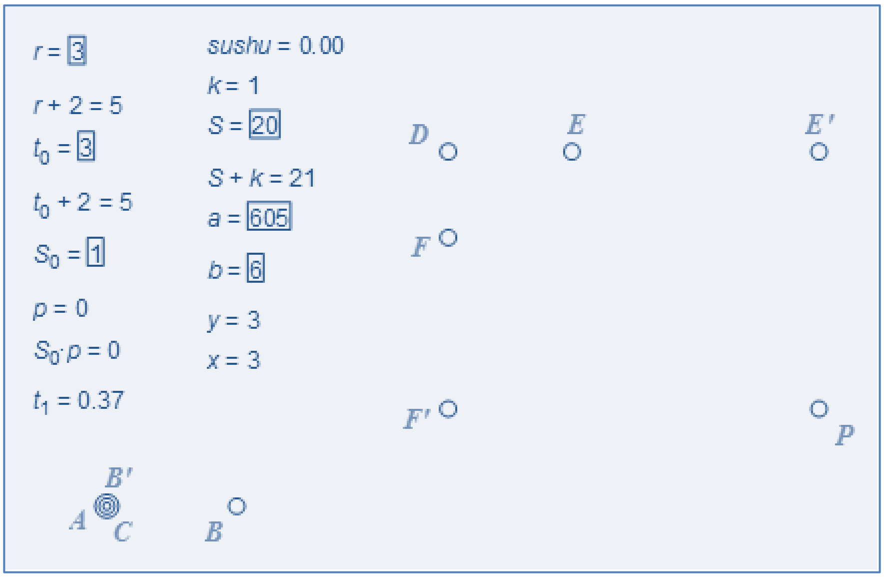


图 106

21、选择$\frac{1}{k}$和点 P，点击【显示→颜色→参数】，按确定按钮，得点 P’。值得注意的是，当 k=1 时，点 P’存在，当 k=0 时，点 P’不存在。这样点 P’就对应了各个素数。

22、选择 r·1 和点 P’，按 Shift 键，点击【编辑→合并文本到点】。隐藏点 P’。

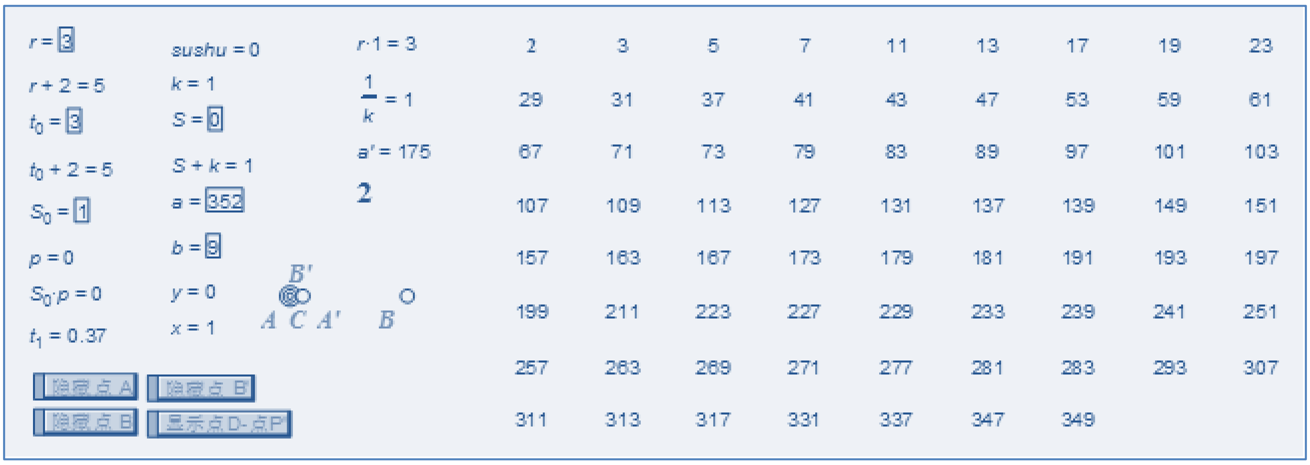


图 107

23、计算$a' = \mathrm{trunc}\left(\frac{a-3}{2}\right)$，得在此范围内的奇数个数，作为迭代次数。

24、选择 r=$\boxed{3}$，S=$\boxed{0}$，a'，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|**初象**，(r，S)→(r+2，S+k)，点击 结构→生成迭代数据表，按 迭代 按钮。

25、用文本工具绘制文本，输入 $\boxed{2}$。显示点 D。

26、选择此文本和点 D，按 Shift 键，点击【编辑→合并文本到点】。如图 107。即得。

小结：

学完本例，你学到了哪些知识，技巧，思路。

1、本例如何实现累积求和或累积求积？

2、本例如何实现文本的出现与否？

第 6 节 杨辉三角

定理 1　二项式定理[1]　设 n 为正整数，k 为大于等于 0 小于等于 n 的整数，对于任意实数 a、b，有

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n.$$

上述公式称为二项式定理。

我们看到$(a+b)^n$的二项展开式共有 n+1 项，其中各项的系数C_n^k称为叫做二项式系数，式中的$C_n^k a^{n-k} b^k$叫做二项展开式的通项，用T_{k+1}表示，即通项为展开的第 k+1 项：

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

推论　令$a=1$，$b=1$，则有

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n.$$

这就是说$(a+b)^n$的二项展开式的各个二项式系数的和等于2^n。

定理 2　组合数公式[2]　设 n 为正整数，k 为大于等于 0 小于等于 n 的整数，则有

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 3\times 2\times 1}$$

这个式子也可以写成

$$C_n^k = \frac{k!}{n!\,(n-k)!}$$

其中，$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1$。另外，规定$C_n^0 = 1$。

我们还可以将上式写成

$$C_n^k = \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\ldots\times\frac{n-(k-2)}{k-1}\times\frac{n-(k-1)}{k}$$

所以，

$$C_n^k = \frac{n-(k-1)}{k}\times C_n^{k-1}$$

定理 3　一元二次方程的求根公式　设 x 是关于 x的一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的实数根，其中，a，b，c为任意实数，且 a≠0，则有

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}，(\Delta = b^2 - 4ac \geq 0)$$

接下来我们说说杨辉三角。

[1] 详见普通高中课程标准实验教科书《数学（选修 2-3）》（人民教育出版社，2009 年 4 月第三版，2011 年 5 月浙江第六次印刷），第 29 页—第 36 页。

[2] 详见普通高中课程标准实验教科书《数学（选修 2-3）》（人民教育出版社，2009 年 4 月第三版，2011 年 5 月浙江第六次印刷），第 23 页。

$(a+b)^n$展开式的二项式系数		
$(a+b)^0$	1	1　　（C_0^0无意义）
$(a+b)^1$	1　1	C_1^0　C_1^1
$(a+b)^2$	1　2　1	C_2^0　C_2^1　C_2^2
$(a+b)^3$	1　3　3　1	C_3^0　C_3^1　C_3^2　C_3^3
$(a+b)^4$	1　4　6　4　1	C_4^0　C_4^1　C_4^2　C_4^3　C_4^4
$(a+b)^5$	1　5　10　10　5　1	C_5^0　C_5^1　C_5^2　C_5^3　C_5^4　C_5^5
$(a+b)^6$	1　6　15　20　15　6　1	C_6^0　C_6^1　C_6^2　C_6^3　C_6^4　C_6^5　C_6^6

值得指出的是，这个表在我国南宋数学家杨辉在 1261 年所著的《详解九章算法》一书里就出现了，所不同的只是这里的表用阿拉伯数字表示，在这本书里记载的是用汉字表示的形式（如图 108）。

这个表称为杨辉三角。在《详解九章算法》一书里，还说明了表里“一”以外的每一个数都等于它肩上两个数的和，杨辉指出这个方法出于《释锁》算书，且我国北宋数学家贾宪（约公元 11 世纪）已经用过它。这表明我国发现这个表不晚于 11 世纪。在欧洲，这个表被认为是法国数学家帕斯卡（B.Pascal，1623—1662）首先发现的，他们把这个表叫做帕斯卡三角。这就是说，杨辉三角的发现要比欧洲早五百年左右，由此可见我国古代数学的成就是非常值得中华民族自豪的。

图 108

例 34 杨辉三角

设想：

我们去掉杨辉三角内的数据，用点来代替它的位置，并设置好这些点的出场顺序（如图 109）。我们观察此图行首第 1 个位置上的数列为：

行(Hang)	H=0	H=1	H=2	H=3	H=4	H=5	H=6	…
数列(a_H)	1	2	4	7	11	16	22	…

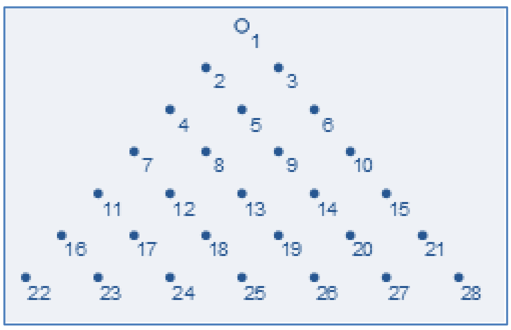


图 109

$$a_2-a_1=4-2=2;$$

$$a_3-a_2=7-4=3;$$

$$a_4-a_3=11-7=4;$$

$$a_5-a_4=16-11=5;$$

$$a_6-a_5=22-16=6;$$

$$\cdots\cdots\cdots;$$

猜想，得

$$a_H - a_{H-1} = H,（H\geqslant 1）$$

叠加这 $H-1$ 个式子，得

$$a_H - a_1 = 2 + 3 + \cdots + H = \frac{(H+2)(H-1)}{2}$$

所以，

$$a_H = \frac{H(H-1)}{2} + a_1 = \frac{(H+2)(H-1)}{2} + 2 = \frac{H^2+H+2}{2}$$

整理，得

$$H^2 + H + 2 - 2a_H = 0,$$

所以，

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 2 - 2a_H,$$

所以，

$$H_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4(2-2a_H)}}{2} = \frac{-1+\sqrt{8a_H-7}}{2},$$

$$H_2 = \frac{-1-\sqrt{8a_H-7}}{2} < 0\left(舍去\right)。$$

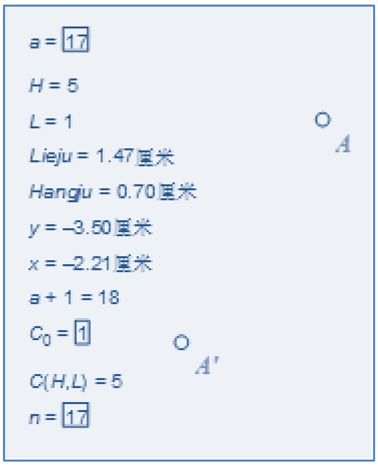


图 110

作法：

1、新建参数 a=17（第 a 个数），计算 H(Hang)= trunc$\left(\frac{-1+\sqrt{8a-7}}{2}\right)$，L(Lie)=a $-\frac{H^2+H+2}{2}$。

2、新建参数 hangju=0.8厘米，lieju=1.5厘米，计算 y=－H×hangju，x=(L－H/2)×lieju。

3、新建参数C_0=1（储存前 L-1 项$\frac{H-(L-1)}{L}$的积），计算C_H^L（几何画板中用 *C(H,L)*表示，**精确度**调为单位）。

$$C_H^L = \left(1-\operatorname{sgn}(L)\right) + \operatorname{sgn}(L) \times \frac{(H-L+1)}{L+\left(1-\operatorname{sgn}(L)\right)} \times C_0$$

下面以C_5^L（L=0，1，2，3，4，5）举例说明。

H	L	C_H^L	C_0
…	…	…	C_4^3=4
4	4	$C_4^4 = (1-1) + 1 \times \frac{(4-4+1)}{4+(1-1)} \times C_4^3 = 1$	C_4^4=1
5	0	$C_5^0 = (1-0) + 0 \times \frac{(5-0+1)}{0+(1-0)} \times C_4^4 = 1$	C_5^0=1
	1	$C_5^1 = (1-1) + 1 \times \frac{(5-1+1)}{1+(1-1)} \times C_5^0 = 5$	C_5^1=5
	2	$C_5^2 = (1-1) + 1 \times \frac{(5-2+1)}{2+(1-1)} \times C_5^1 = 10$	C_5^2=10
	3	$C_5^3 = (1-1) + 1 \times \frac{(5-3+1)}{3+(1-1)} \times C_5^2 = 10$	C_5^3=10

H	L	C_H^L	C_0
…	…	…	$C_4^3=4$
	4	$C_5^4=(1-1)+1\times\dfrac{(5-4+1)}{4+(1-1)}\times C_5^3=5$	$C_5^4=5$
	5	$C_5^5=(1-1)+1\times\dfrac{(5-5+1)}{5+(1-1)}\times C_5^4=1$	$C_5^5=1$
6	0	$C_6^0=(1-0)+0\times\dfrac{(6-0+1)}{0+(1-0)}\times C_5^4=1$	$C_6^0=1$
…	…	…	…

4、任取点 A，点 A 沿直角坐标（x，y）平移得点 A'。选择点 A 和 $C(H,L)=5$，按 Shift 键，点击【编辑→合并文本到点】。如图 110。

5、令 a=1（原来是 a=17，当把 a 的值改为 1 时，点 A'与点 A 重合），隐藏点 A 和点 A'，并计算 a+1=2，新建参数 n=17（迭代参数）。

图 111

6、选择 a=1，C_0=1，n=17，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，（a，C_0）→（a+1，*C(H,L)*），如图 111，图 112，按迭代按钮。

图 112

点评：

这个例子在《几何画板使用手册》也有讲解，行和列的计算方法不同，组合数的计算相同。我在编写步骤时，详写了计算 H(Hang)的思维过程，没有写出计算 L(Lie)的思维过程。

此例的解法不一定就一种，我们可以考虑找出行尾的数列进行相应的计算。多试一试从不同的方法解决同一个问题，受益匪浅。

例 35 九九乘法表

作法：

1、新建参数 a=$\boxed{6}$，计算 a+1=7，$q=\mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8a-7}}{2}\right)+1$，$r=\mathrm{a}-\frac{(q-1)^2+(q-1)+2}{2}+1$，$d=q\times r$。

新建热文本 $\boxed{q\times r=d}$。

2、任取点 A。点 A 沿极坐标（0.3 厘米，0°）平移得点 B，作射线 AB，在其上取点 C。以点 C 关于中心 A 缩放 r 得点 D。点 A 沿极坐标（0.3 厘米，−90°）平移得点 B′，作射线 AB′，在其上取点 C′。以点 C 关于中心 A 缩放 q 得点 D′。点 D 沿标记向量 A|D′平移得点 P。

合并热文本 $\boxed{q\times r=d}$到点 P。隐藏点 A，点 B，点 B′，点 P。隐藏射线 AB 和射线 AB′。

3、令 a=$\boxed{0}$（令 a=$\boxed{0}$时，以上计算的值以及热文本都会出现未定义，想一想，为什么会这样？），新建参数 n=$\boxed{45}$，选择 a=$\boxed{0}$，n=$\boxed{45}$，按 Shift 键，迭代|初象，a→a+1，按迭代按钮。即得。

小结：

细心的读者能发现例 34 中 H 和 L 的算法和例 35 中 q 和 r 的算法略有不同。

由$q=\mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8a-7}}{2}\right)+1$，得$q-1=\mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8a-7}}{2}\right)$，所以 H=$q-1$；

由$r=\mathrm{a}-\frac{(q-1)^2+(q-1)+2}{2}+1$，得$r-1=a-\frac{(q-1)^2+(q-1)+2}{2}=a-\frac{H^2+H+2}{2}$，所以$\mathrm{L}=r-1$。

这样就解决了例 35 中出现 $\boxed{0\times 0=0}$ 的可能性。

有兴趣的板友可以将例 35 中的 q 和 r 换作下式进行试验：

$$q=\mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8a-7}}{2}\right),\quad r=a-\frac{q^2+q+2}{2}。$$

不要怕出问题。只有多出问题，才会有更多的解决问题之法，才能进步。对例子中的每一步计算都要心存质疑。“学而不思则罔，思而不学则殆。”绝不能让我们的思路牵着问题走，而是问题牵着让我们的思路走。

继续对 q 和 r 的式子进行调整。先定义两个函数：

$$q(a)=\mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8a-7}}{2}\right),\quad r(a)=a-\frac{q^2+q+2}{2}。$$

则有

$$Q(t)=q(t+1)=\mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8(t+1)-7}}{2}\right)=\mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8t+1}}{2}\right),$$

$$R(t)=r(t+1)=(t+1)-\frac{q^2+q+2}{2}=t-(q^2+q)=t-q(q+1)。$$

我们需要特别注意，函数$q(a)$和$r(a)$中，$a \in \left[\frac{7}{8},\ +\infty\right)$。而在函数$Q(t)$和$R(t)$中，$t \in \left[-\frac{1}{8},\ +\infty\right)$。

换句话，在函数$q(a)$和$r(a)$中，a的值不能等于 0，但在函数$Q(t)$和$R(t)$中，t的值可以 0。因此，例 34 杨辉三角中行和列的计算，有了另一种算法：

$$\mathrm{H(Hang)} = \mathrm{trunc}\left(\frac{-1+\sqrt{8a+1}}{2}\right),\ \mathrm{L(Lie)} = a - \mathrm{H(H-1)}。$$

第 7 节 轨迹迭代

例 36 双控旋梯（N 边旋）[①]

还记得例 8 正方旋吗？在该例的结尾给出了五边旋（如图 27）。几何画板能实现六边旋，七边旋，…，N 边旋吗？这就是我们此例要说的双控旋梯。

作法：

一、新建参数及相关计算

1、新建参数 a=$\boxed{5}$（边数），θ =$\boxed{156}$°（构造轨迹），n=$\boxed{4}$（迭代参数），计算$\beta=\frac{360^\circ}{5}$（正 n 边形的中心角），$\gamma=\text{trunc}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)\times\beta$。

（θ：在几何画板标签栏输入{theta}；β：在几何画板标签栏输入{beta}；γ 在几何画板标签栏输入{gamma}。）

二、点轨迹法构造正 n 边形（此时，a=$\boxed{6}$，θ =$\boxed{156}$°，n=$\boxed{15}$）

2、任取点 A（正 n 边形的中心），点 B（正 n 边形的顶点）。

3、以点 A 为中心，点 B 旋转 β，得点 B'。连接 BB'，在其上任取点 C。

4、以点 A 为中心，点 C 旋转 γ，得点 C'。点 C'旋转 β，得点 C''。点 C 旋转 θ，得点 D。

5、连接 C'C''，连接 AD。线段 C'C''和线段 AD 相交于点 E。

图 113

6、选择 θ =$\boxed{156}$°，选择点 E，点击【构造→轨迹】，在弹出的轨迹#3 窗口中绘图选项卡内填写：<u>采样数量</u>：$\boxed{500}$；<u>范围（在度）</u>：$\boxed{0.0}$≤ θ ≤$\boxed{360.0}$，如图 113，按$\boxed{\text{确定}}$按钮。即画好了点轨迹法正 n 边形。

三、深度迭代

① 此例原创：潘建平，方小庆。

7、选择点 B，n=15，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，B→C，点击结构➔仅保留非点类项，如图 114，按迭代按钮。

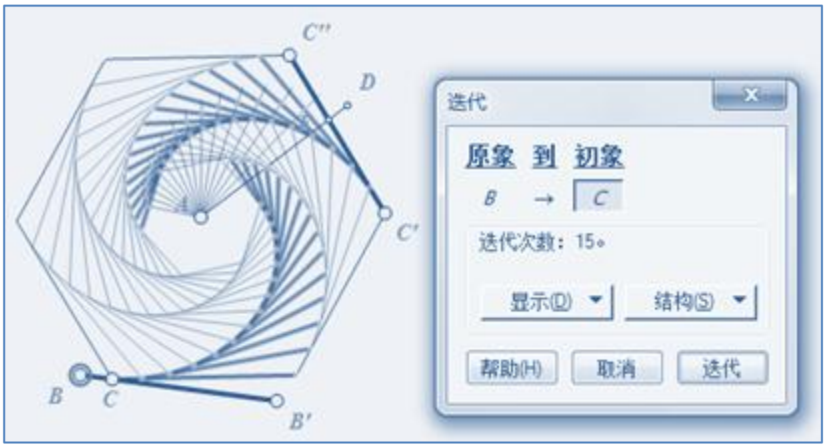


图 114

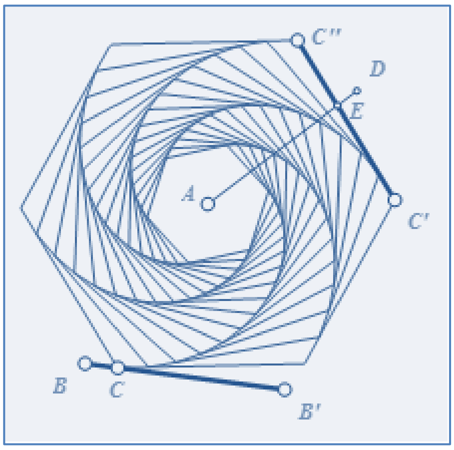


图 115

8、删除多余的迭代象，如图 115，即得。

小结：

本例旨在提供一种迭代思路——轨迹线也可以参与迭代。同时，我们在用轨迹线参与迭代时，尽量使用点轨迹，不使用线段轨迹。这是因为线段轨迹参与迭代后，轨迹的采样数严重影响几何画板的运算能力。

第 8 节 点值迭代

例 37 圆方迭代

作法 1：

1、任取点 A，点 B。以点 B 为中心，点 A 旋转 90° ，得点 C；以点 A 为中心，点 C 旋转 180° ，得点 H；点 C 和点 H 旋转 90° ，得点 D 和点 I。

2、选择点 C，点 D，点 H，点 I，点击【构造→四边形的内部】，得四边形 CDHI。

3、双击点 A，选择点 C，点 B，点 D，点击【变换→缩放】，在弹出的缩放窗口，**固定比**设置为1：$\sqrt{2}$（如图 116，注意 2^(1/2)），按缩放按钮，得点 C'，点 B'，点 D'，如图 117。

图 116

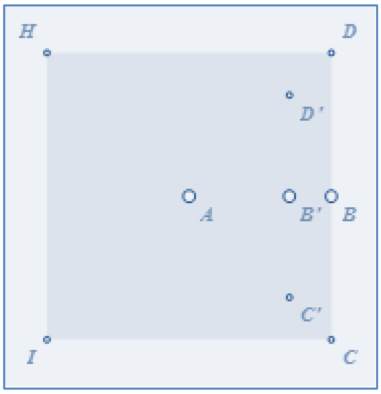


图 117

4、选择点 C'，点 B，点 D'，点击【构造→过三点的弧】，点击【构造→弧内部→弓形内部】，点击【编辑→属性】，如图 118，在弹出的弓形#1对话框中，选择不透明度选项卡，将不透明度设置为 100%，按确定按钮。

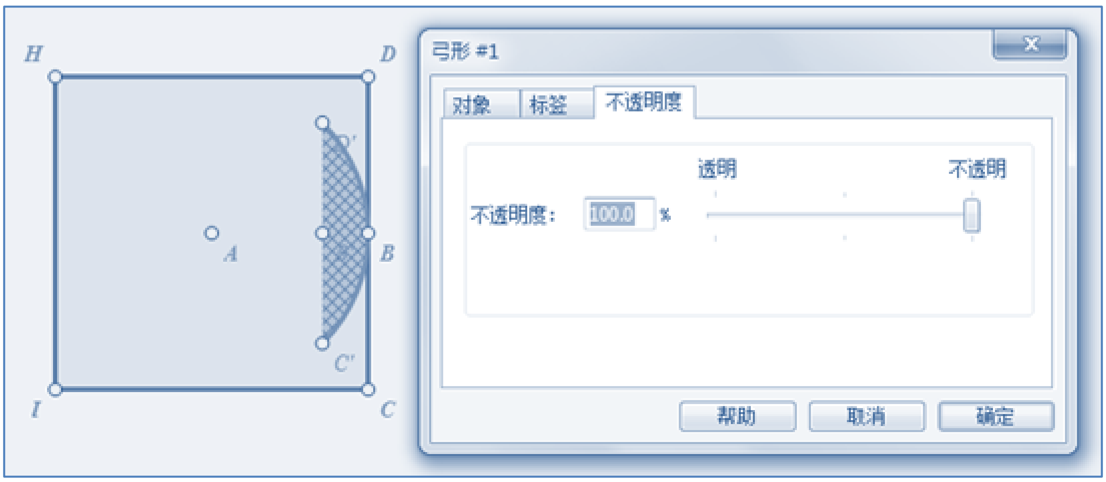


图 118

5、以点 A 为中心，将弓形旋转 90° ，如图 119，同法，得图 120，图 121。

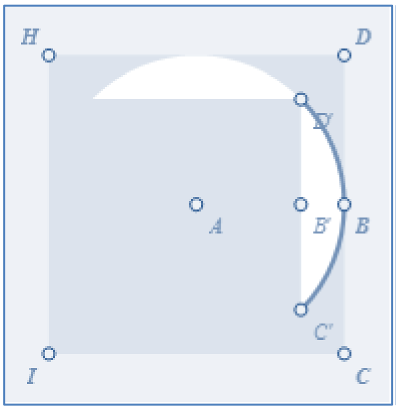


图 119

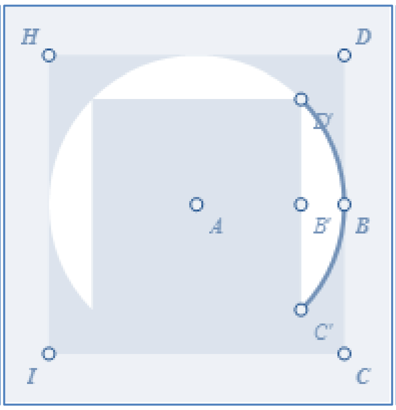


图 120

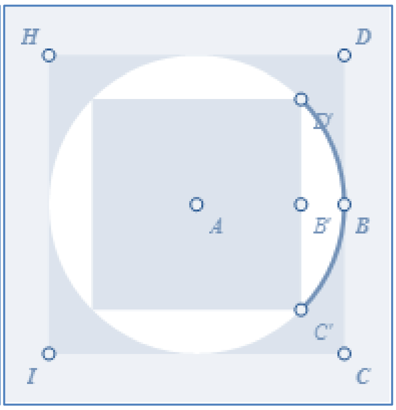


图 121

6、隐藏除点 B 和点 B′外的所有点，隐藏弧 C′D′。

7、选择点 B，点击【变换➔迭代】，迭代|初象，B→B′，点击结构➔仅保留非点类项，如图 122，按迭代按钮。即得。如图 123。

图 122

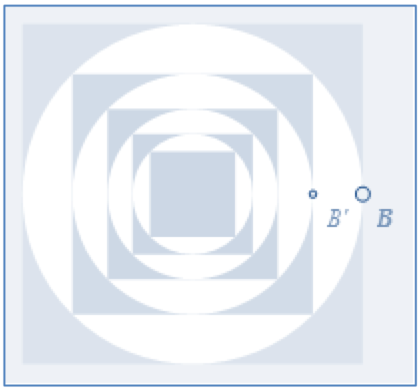


图 123

例 38 正多边形深井[1]

此例是例 37 圆方迭代的推广。先用点轨迹构造正 n 边形，然后在正 n 边形上进行推演。

作法 1：

一、绘制正 n 边形（如图 124）

1、任取点 A（正 n 边形的中心），点 B（正 n 边形的顶点）。

2、新建参数 n=$\boxed{5}$，计算 $\theta=\frac{360°}{n}$，以点 A 为中心，点 B 旋转 θ，得点 B′。

3、连接 BB′，在其上取点 C，点击【度量➔点的值】，得 c=0.36，计算 α=trunc(n×c)×θ（用来绘制决定轨迹的点 D′），$d=(\mathrm{n}\times \mathrm{c})-\mathrm{trunc}(\mathrm{n}\times \mathrm{c})$（确定点 D 的位置）。

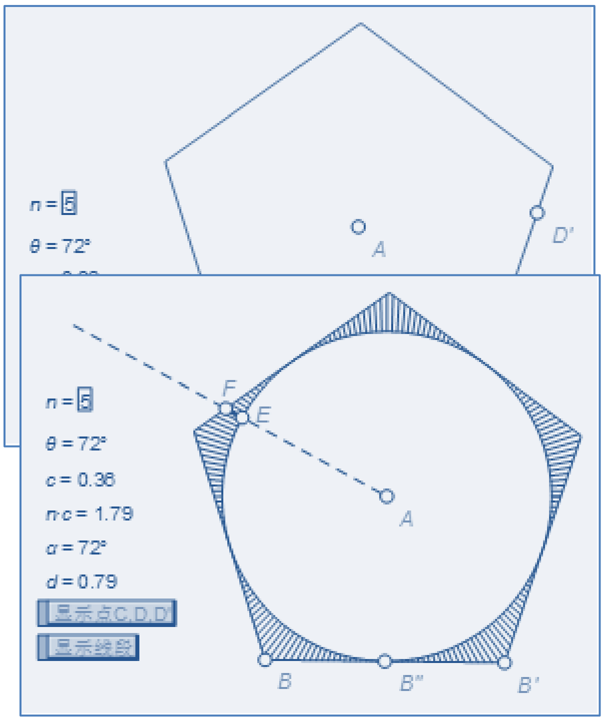


图 125

① 初稿整理：余清海。有改动。

4、选择线段 BB′和 *d*，点击【绘图➔在线段上绘制点】，得点 D。

5、点 D 关于中心点 A 旋转 α，得点 D′。

6、选择点 C，点 D′，点击【构造➔轨迹】，如图 124。隐藏点 C，点 D，点 D′。隐藏线段 BB′。

二、绘制阴影面（如图 125）

7、点 B′关于中心 B 缩放 50%，得点 B″。

8、绘制⊙AB″，在其上取点 E。作射线 AE 交轨迹线于点 F。

9、连接 EF。选择点 E 和线段 EF，点击【构造➔轨迹】，如图 125。隐藏点 E 和点 F，线段 EF，射线 AE。

三、绘制迭代象

10、⊙AB″上任取点 G。选择点 B，点击【变换➔迭代】，迭代|初象，B→G，点击结构➔仅保留非点类项，如图 126，按迭代按钮。

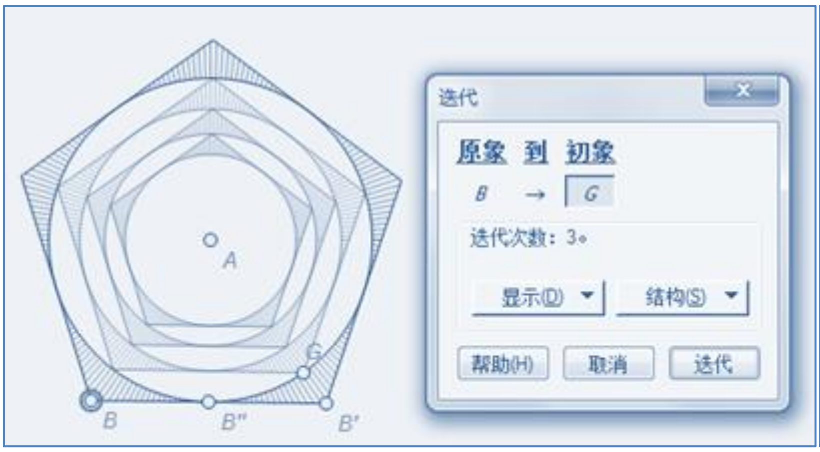


图 126

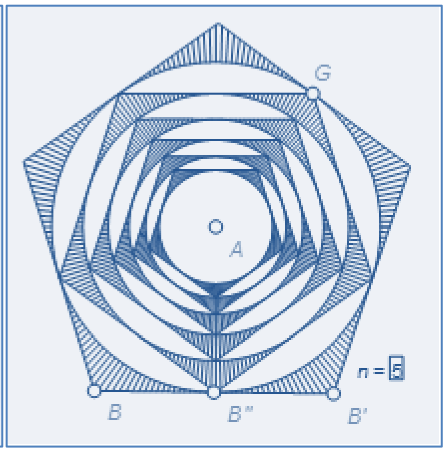


图 127

如图 127，拖动点 G，可旋转迭代象。选择迭代象，可调节迭代深度。选择 n=5，可调整边数。

作法 2：

第 1-7 步，如前。

8、如图 128，绘制⊙AB″，显示点 C，点 D。

9、连接 AD′交⊙AB″于点 H，连接 D′H。

10、选择点 C 和线段 D′H，点击【构造➔轨迹】。

11、选择点 B，点击【变换➔迭代】，迭代|初象，B→H，点击结构➔仅保留非点类项，如图 129，按迭代按钮。

如图 130，拖动点 C，可旋转迭代象。选择迭代象，可调节迭代深度。选择 n=5，可调整边数。

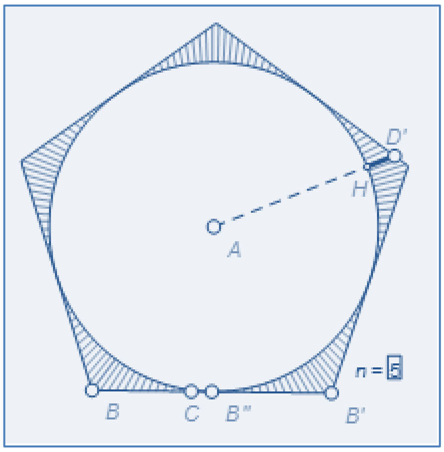


图 128

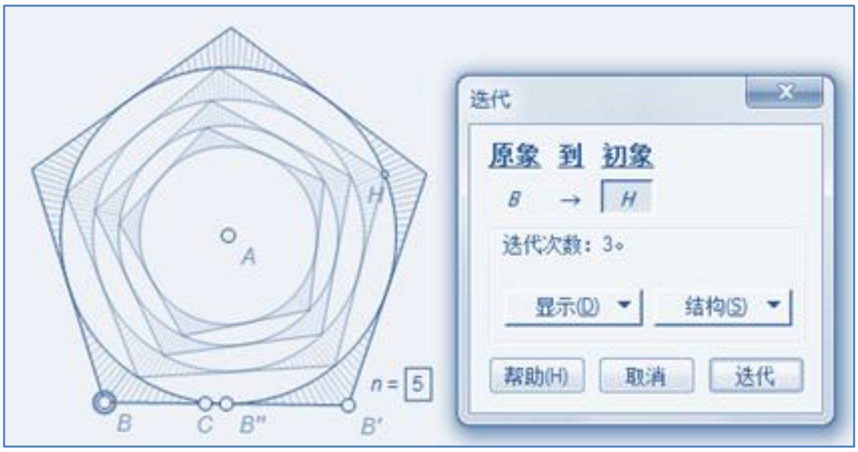


图 129

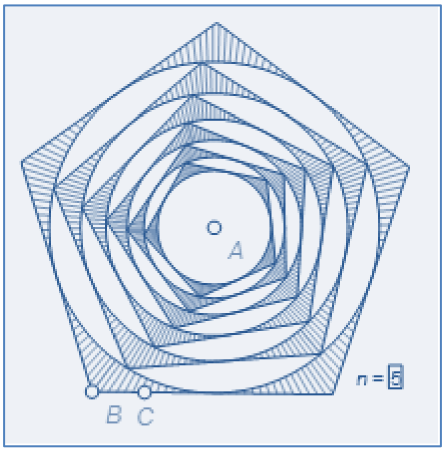


图 130

小结：

以上两例在构造阴影部分时，采用不同的方法。例 37 圆方迭代采用面积覆盖法，例 38 正多边形深井采用轨迹构造法。能否用面积覆盖法来实现例 38 正多边形深井呢？板友们不仿试试。

例 39 旋转点阵

如图 131，等差数列 1，2，3，…，N，围绕正 M 边形由里到外，依次缠绕。参数 M 控制多边形的边数，参数 N 控制缠绕的数字个数。

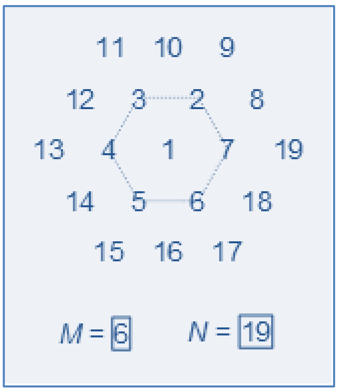


图 131

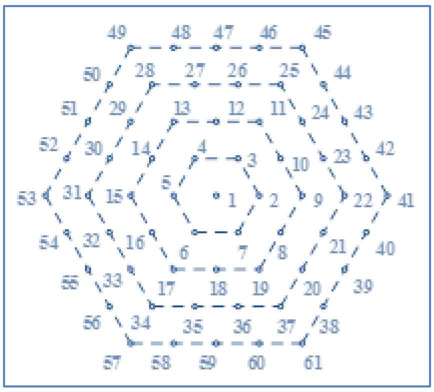


图 132

思路：

利用点值法来实现点在动态的正 M 边形上移动。如图 132，设 q（$q\geqslant 0$）表示正多边形的圈数，a_q表示第 q圈最大数，M 表示正多边形的边数，则有

$$a_0=1,\ a_1=7,\ a_2=19,\ a_3=37,\ \ldots,\ a_q=\frac{Mq(q+1)}{2}+1$$

所以，

$$q=\frac{-M+\sqrt{M^2-4M(2-2a_q)}}{2M}=\frac{-M+\sqrt{M^2+8Ma_q-8M}}{2M}$$

作法：

一、基础计算

1、新建参数 M=$\boxed{7}$（边数），a=$\boxed{19}$（多边形上的点的总个数），计算$\theta=\frac{360°}{M}$（旋转角），q（圈数，且控制多边形的大小），r（绘制多边形上的动点）。

$$q=\operatorname{trunc}\left(\frac{-M+\sqrt{M^2+8Ma-8M-0.1^5}}{2M}\right)+1,\ r=\frac{a-\left(\frac{M}{2}\times q^2-\frac{M}{2}\times q+1\right)}{M\times q}。$$

二、利用轨迹法绘制正 M 边形

2、任取点 A（多边形的中心），点 B（单位点）。

3、以点 A 为中心，点 B 缩放 q，得点 B’（正 M 边形的顶点）。

4、以点 A 为中心，点 B’旋转 θ，得点 B”（正 M 边形上的另一顶点）。

5、连接 BB’，在其上取点 C，点击【度量➔点的值】，得 c =0.54，计算 α=trunc(M×c)×θ（用来绘制决定轨迹的点 D’），$d=(\mathrm{M}\times\mathrm{c})-\operatorname{trunc}(\mathrm{M}\times\mathrm{c})$（确定点 D 的位置）。

4、选择线段 BB’和 d，点击【绘图➔在线段上绘制点】，得点 D。

5、点 D 关于中心点 A 旋转 α，得点 D’。

6、选择点 C，点 D’，点击【构造➔轨迹】，如图 133。隐藏点 C，点 D，点 D’。隐藏线段 BB’。

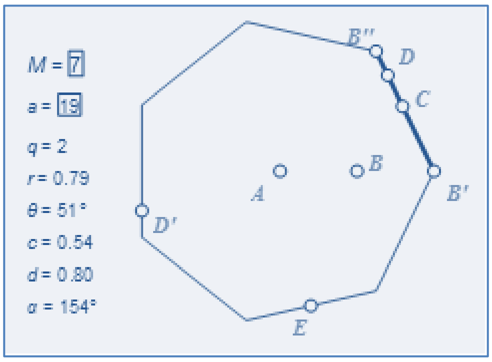


图 133

三、绘制多边形上的点。

7、选择 r和轨迹线，点击【绘图➔在轨迹上绘制点】，得点 E。

8、计算 1 a=19。合并 1 a=19 到点 E。合并 a=19 到点 A。

四、深度迭代

图 134

9，令 a=1，新建参数 N=19，计算 a+1=2，N－1=18（迭代次数）。隐藏不必要的图元。

10、选择 a=1，N－1=18，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，a➔ a+1，如图 134，按迭代按钮。

注意：图 134 被圈起来的位置上，两个文本重叠了。

11、进行适当的修整，便可实现图 131 的效果。

小结：

1、对 q 的计算式子中的 0.1^5 理解要迭代过程完成后，后期调试时，补充理解。

2、此例的贡献在于，点的值在迭代中的应用。

第 9 节 曲边梯形①

我们现在肯定会计算正方形、三角形、平行四边形、梯形等“直边图形”平面图形的面积；我们还会遇到计算平面曲线围成的平面“曲边图形”的面积。如何解决这些问题呢？能否把求“曲边图形”的面积转化为求“直边图形”的面积？因此，我们先来了解一些相关的数学思维。

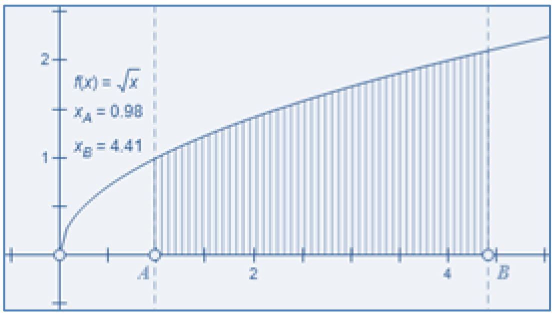


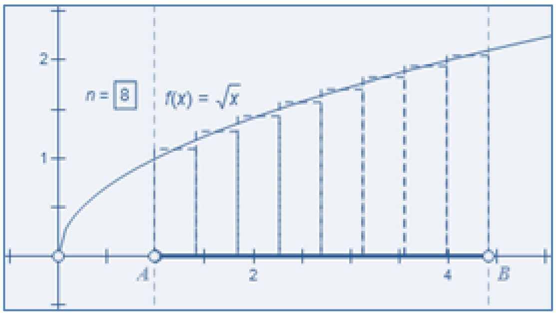
图 135

我们来看一种特殊情况：如何求 $f(x)=\sqrt{x}$，$x_A=0.98$，$x_B=4.41$，y=0 所围成的平面图形（图 135 中的阴影部分）的面积。

① 详见普通高中课程标准实验教科书《数学（A 版，选修 2-2）》(人民教育出版社，2007 年 1 月第 2 版，2011 年 5 月浙江第 8 次印刷)，第 38 页。

可以发现，图 135 中的曲边梯形与直边图形的主要区别是，前者有一边是曲线段，而直边图形的所有边都是直线段。我们能否用直边图形（比如矩形）逼近曲边梯形的方法，求图 135 中阴影部分面积呢？

我们试着把区间[a，b]分成许多小区间，进而把曲边梯形折分为一些小曲边梯形。对每个小曲边梯形用矩形的面积近似代替小曲边梯形的面积，得到每个小曲边梯形面积的近似值，对这些近似值求和，就得到曲边梯形面积的近似值。可以想象，随着拆分越来越细，近似程度就会越来越好（如图 136）。即：用化归为计算矩形面积和逼近的思想方法求出曲边梯形的面积。



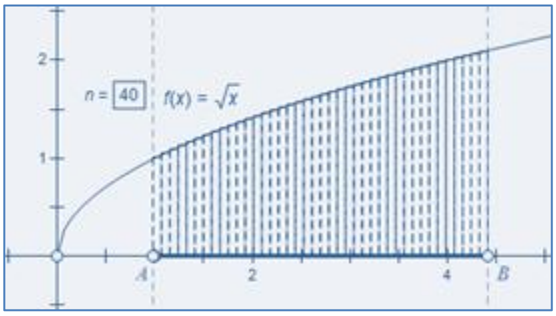


图 136

接下来，我们通过具体的步骤来实施这种方法。

例 40 曲边梯形

作法：

一、基础工作（如图 137）

1、新建参数 n=$\boxed{8}$，计算 n-1=7（迭代次数），$\frac{1}{n}$（分割比）。

2、点击【绘图➔绘制新函数】，在新建函数窗口中键入 $\boxed{\text{sqrt(x)}}$，按$\boxed{\text{确定}}$按钮，此时，画板中自动在直角坐标系中绘制出函数$f(x)=\sqrt{x}$的图象并显示表达式。原点标签改为 O，隐藏单位点和矩形网格。

3、在 x 轴上任取点 A，点 B，点 A 在点 B 左侧。

4、连接 AB，在其上取点 C。

5、以点 A 为中心，点 B 缩放$\frac{1}{n}$，得点 B’。

6、点 C 沿标记向量 A|B’平移，得点 C’。

7、以点 C 为中心点 C’缩放 50%，得点 C”。

8、过点 C”作 x 轴的垂线交$f(x)=\sqrt{x}$的图象与点 D。

9、点 C 和点 C’沿标记向量 C”|D 平移，得点 E 和点 F。连接 CE，连接 EF，连接 FC‘。

10、选择点 C，点 C’，点击【度量➔坐标距离】，得 CC’=0.43。选择点 C”，点 D，点击【度量➔坐标距离】，得 C”D=1.1.73。计算 dS=CC’×C”D×1 厘米=0.74 厘米。隐藏点 B’，点 C”，D，点 E，点 F 和垂线 C”D。

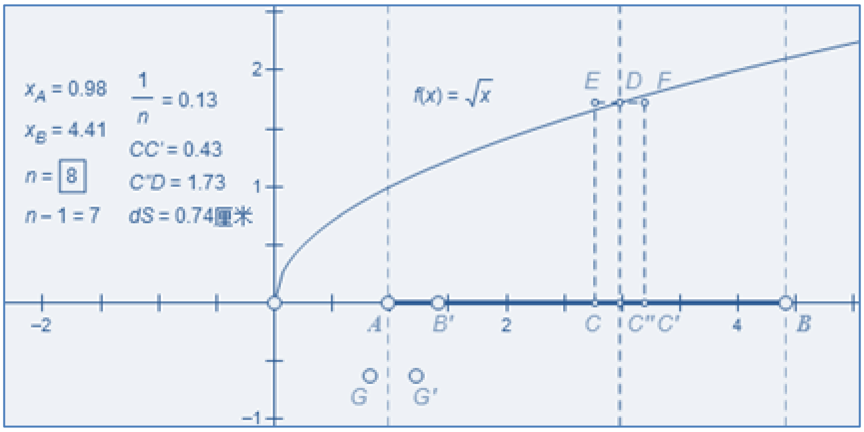


图 137

11、任取点 G。点 G 沿极坐标（dS，0°）平移，得点 G‘。

二、累积求和与分割

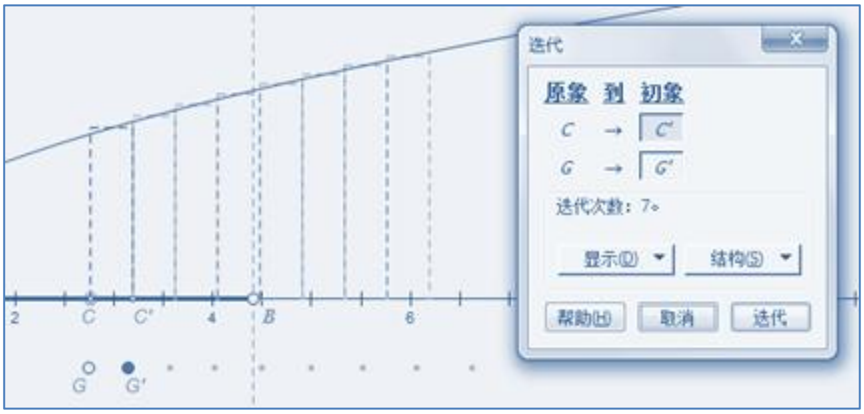


图 138

12、选择点 C，点 G，n－1=7，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代|初象，(C，G)→(C′，G′)，不生成迭代数据表，如图 138，按迭代按钮。请注意，原象点 C 为半自由点。

13、选择点 G′的迭代象，点击【变换→终点】，得点 H。如图 139。

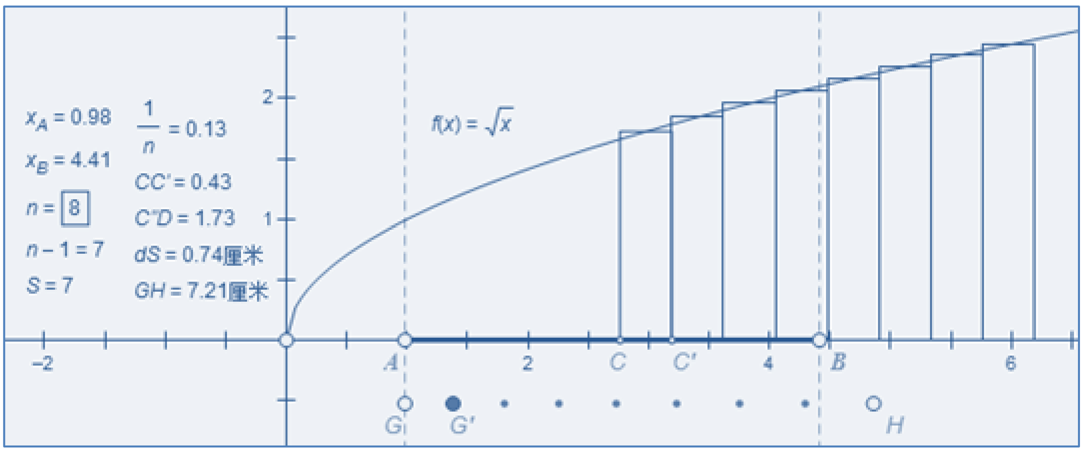


图 139

14、选择点 G，点 H，点击【度量➔距离】(请注意，此处不能是点击【度量➔坐标距离】)，得 GH=7.21 厘米。计算$S=\frac{FG}{1\text{厘米}}=7.21$。

15、移动点 C 到点 A，此时，GH=5.53 厘米，S=5.52753。

所以，S=5.28 便是图 135 中函数$f(x)=\sqrt{x}$ 在区间[0.98，4.41]内的阴影部分面积。如图 140。

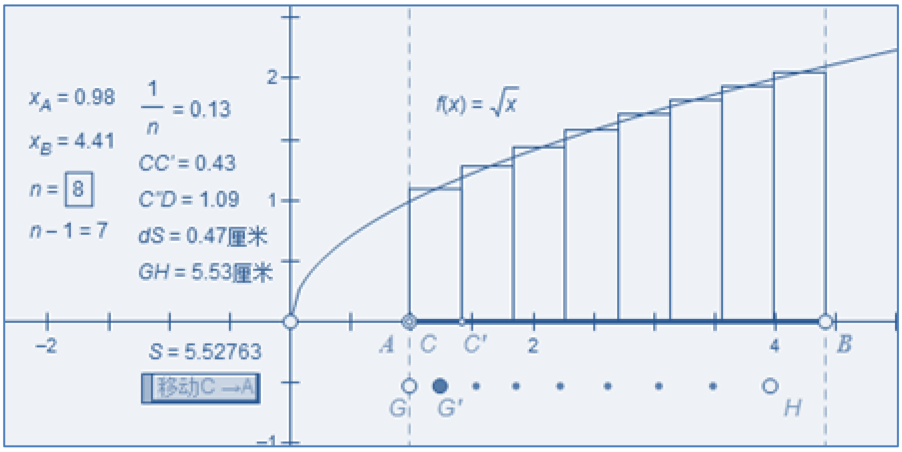


图 140

三、近似求和与结果比较

16、当$x_A=0.98$，$x_B=4.41$时，可知

$$S_{\text{阴}}=\int_a^b f(x)=\int_{0.98}^{4.41}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0.98}^{4.41}=\frac{2}{3}\times 4.41^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\times 0.98^{\frac{3}{2}}\approx 5.52561。$$

17、令 n=$\boxed{100}$，则 S=5.52562；令 n=$\boxed{168}$时，S=5.52561。此时，S 已经非常接近$S_{\text{阴}}$。

小结：

求一曲边梯形的面积，一般情况分四步实现：第一步，分割：把曲边梯形分割成 n 份较小的曲边梯形。第二步，近似替代，用与它相近的直边梯形去替代每个较小的曲边梯形。第三步，求和，在几何画板中通常得用点的平移变换来实现求和。第四步，求极限，将 n 的值变大，让直边梯形的面积和去逼近曲边梯形的面积。

也就是说，画板演示的，正是定积分的本质。相关的知识可以参阅《数学分析（上册）(第三版)》(华东师范大学数学系 编，高等教育出版社出版，2001 年 6 月 1 日第 1 版)。

例 41 椭圆的弧长

作法：

一、基础工作（如图 141）

1、用圆工具绘制⊙AB，连接 AB，在其上取点 C，点 D。

2、选择点 A，点 C，点 D，点击【构造➔圆上的弧】，点击【度量➔弧度角】，得 θ =132°。

3、新建参数 n=$\boxed{5}$，计算 n-1=4（迭代次数），$d\theta=\frac{\theta}{n}$（旋转角）。

3、连接 AB，在其上取点 E。

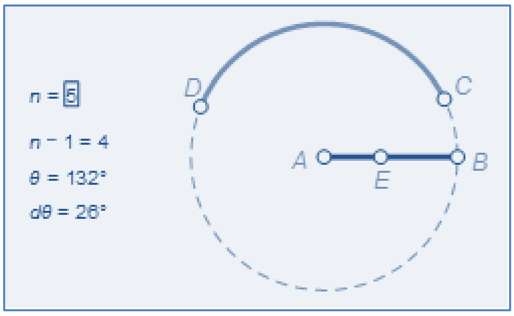


图 141

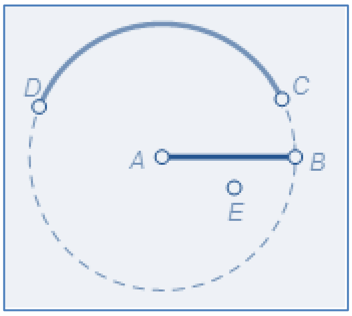


图 142

二、利用缩放变换绘制椭圆上的点

4、选择点 A，点 B，点 E，点击【变换➔标记比】。

5、选择点 E，点击【编辑➔从线段分离点】。如图 142。

6、双击点 A，选择点 B，点击【变换➔缩放】，在弹出的缩放窗口中（如图 143），按缩放按钮，得点 B’，如图 144。

图 143

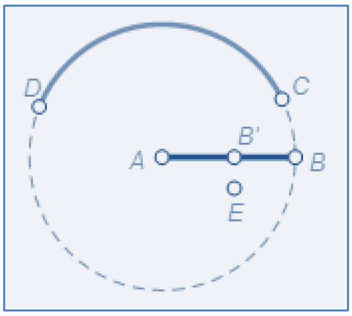


图 144

7、选择弧 CD 和点 E，点击【编辑➔合并点到弧】，如图 145。

8、删除线段 AB。连接 B’E，在其上取点 F。点 F 为椭圆上的点。

三、分割及累积求和

9、选择点 E，点 F，点击【变换➔创建自定义变换】，在弹出的创建自定义变换窗口，键入<u>自定义变换名称</u>：E→F 变换，如图 146。

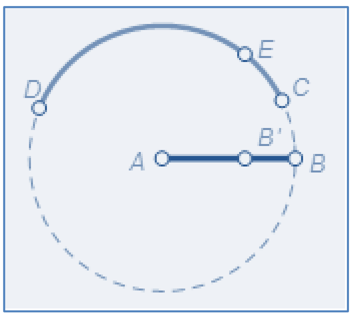


图 145

图 146

10、以点 A 为中心，点 E 旋转 $d\theta$，得点 E’。

11、选择点 E’，点击【变换➔E→F 变换】，得点 E’’。

12、连接 FE’’。选择点 F，点 E’’，点击【度量➔距离】，得 ds=FE’’=0.87 厘米。

13、任取点 G，点 G 沿极坐标（ds，0° ）平移，得点 G’。如图 147。

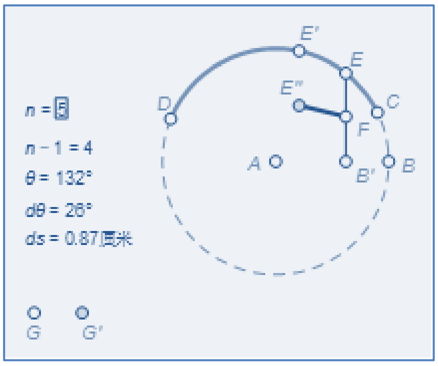


图 147

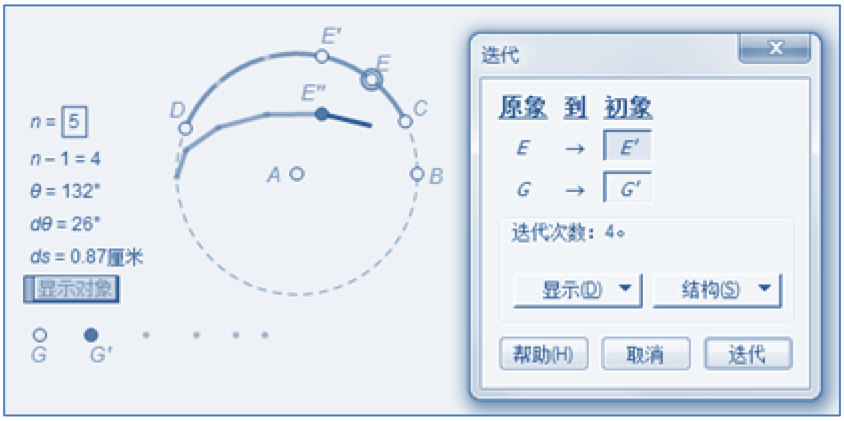


图 148

四、近似替代

14、隐藏点 B’，点 F 和线段 EB’。选择点 E，点 G，n-1=4，按 Shift 键，点击【变换➔深度迭代】，迭代|初象，(E，G)➔(E’，G’)，如图 148，按迭代按钮。

15、选择点 G‘的迭代象，点击【变换➔终点】，得点 H。

16、选择点 G，点 H，点击【度量➔距离】，得，GH=3.84610 厘米，显示所有图元，如图 149。

17、选择点 E’’的迭代象，点击【变换➔终点】，得点 K（此步可省略，仅为叙述方便。）

18、令 n=30，点 E 移动到点 C。此时，GH=4.06135 厘米。调整部分图元的属性，如图 150。

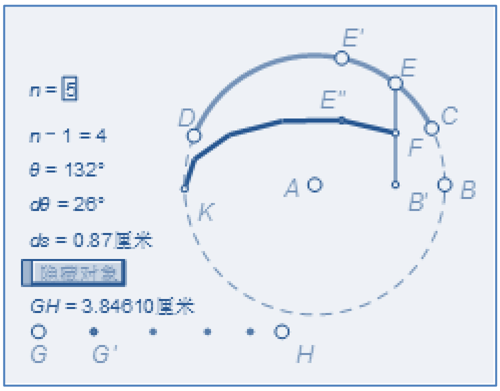


图 149

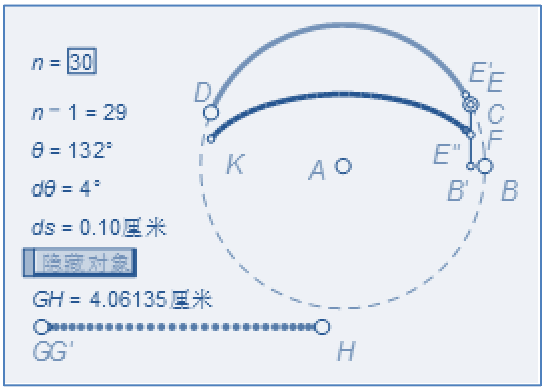


图 150

所以，椭圆弧 FK 的长度近似等于 4.06135 厘米。

第 10 节 二分法

例 42 用二分法估算方程的解[①]

问题：

求方程$e^x+2(x+1)=0$的解。

作法：

一、准备工作

1、点击【绘图→绘制新函数】，在弹出的新建函数对话框中，输入$e^x+2(x+1)$，按$\boxed{\text{确定}}$键。此时绘图区自动绘制出函数$f(x)=e^x+2(x+1)$的图象。

2、选择函数$f(x)=e^x+2(x+1)$的图象和 x 轴，点击【构造→交点】，得点 A。

3、点击【度量→横坐标】，得$x_A=-1.15718$。所以$x_A=-1.15718$是方程$e^x+2(x+1)=0$的解。如图 151。

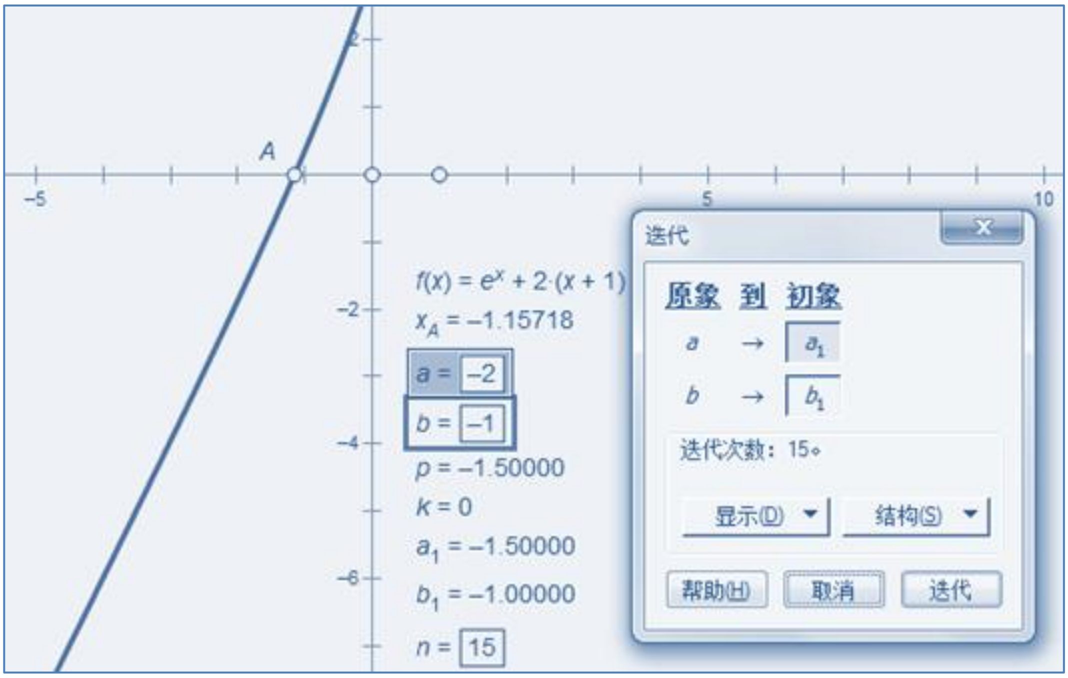


图 151

二、设定参数

4、由图 151 可知，方程$e^x+2(x+1)=0$的解在$[-2,\ -1]$。所以，新建参数 a=$\boxed{-2}$，b=$\boxed{-1}$。新建函数$f(x)=e^x+2(x+1)$。

5、计算$p=\frac{(a+b)}{2}$（区间缩小），$k=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(f(p))+1)$（区间判断）。$a_1=ak+(1-k)p$（左边界），$b_1=kp+(1-k)b$（右边界）。

① 原创：潘建平，简化：贺基旭。

三、深度迭代

6、新建参数 n=15。选择 a=−2，b=−1，n=15，按 Shift 键，点击【变换→深度迭代】，迭代初象，$(a, b) \rightarrow (a_1, b_1)$，按迭代按钮。

7、如图 152，我们从迭代数据表中可以看出方程$e^x + 2(x+1) = 0$的解在区间$[-1.5720, -1.15718]$之间。

$n = 15$

n	p	k	a_{n+1}	b_{n+1}
0	−1.50000	0	−1.50000	−1.00000
1	−1.25000	0	−1.25000	−1.00000
2	−1.12500	1	−1.25000	−1.12500
3	−1.18750	0	−1.18750	−1.12500
4	−1.15625	1	−1.18750	−1.15625
5	−1.17188	0	−1.17188	−1.15625
6	−1.16406	0	−1.16406	−1.15625
7	−1.16016	0	−1.16016	−1.15625
8	−1.15820	0	−1.15820	−1.15625
9	−1.15723	0	−1.15723	−1.15625
10	−1.15674	1	−1.15723	−1.15674
11	−1.15698	1	−1.15723	−1.15698
12	−1.15710	1	−1.15723	−1.15710
13	−1.15717	1	−1.15723	−1.15717
14	−1.15720	0	−1.15720	−1.15717
15	−1.15718	1	−1.15720	−1.15718

图 152

$n = 18$

n	p	k	a_{n+1}	b_{n+1}
0	−1.50000	0	−1.50000	−1.00000
1	−1.25000	0	−1.25000	−1.00000
2	−1.12500	1	−1.25000	−1.12500
3	−1.18750	0	−1.18750	−1.12500
4	−1.15625	1	−1.18750	−1.15625
5	−1.17188	0	−1.17188	−1.15625
6	−1.16406	0	−1.16406	−1.15625
7	−1.16016	0	−1.16016	−1.15625
8	−1.15820	0	−1.15820	−1.15625
9	−1.15723	0	−1.15723	−1.15625
10	−1.15674	1	−1.15723	−1.15674
11	−1.15698	1	−1.15723	−1.15698
12	−1.15710	1	−1.15723	−1.15710
13	−1.15717	1	−1.15723	−1.15717
14	−1.15720	0	−1.15720	−1.15717
15	−1.15718	1	−1.15720	−1.15718
16	−1.15719	0	−1.15719	−1.15718
17	−1.15718	1	−1.15719	−1.15718
18	−1.15719	0	−1.15719	−1.15718

图 153

我们可以调整参数 n 的值来看到更精确的解的取值范围，如图 153。

第6章 附录

原《几何画板迭代全解》目录①

① 原书谢辅炬编写，唐家军修订。

例 3.6　牛顿迭代法（例 23 牛顿迭代法，原书描述错误，重写）

记事

2014 年 4 月 13 日，创建“几何画板迭代初步”文件夹，开始准备工作。

2014 年 4 月 14 日~16 日，确定本书的表述方式。

2014 年 4 月 17 日，添加例 29 用带余数除法创建同余表，此例在 2014 年 4 月 1 日在几何画板上写好。

2014 年 4 月 22 日，添加例 28 用迭代法制作数轴、例 28 简易坐标系（后删除）。

2014 年 4 月 23 日，制作完成谢辅炬老师的除 H 迭代外的所有案例，并在群内发布“几何画板迭代初步 v1”。

2014 年 4 月 23 日，添加例 28 用迭代法制作数轴的小结内容。

2014 年 4 月 26 日，添加例 34 杨辉三角。

2014 年 4 月 30 日，添加例 29 镶嵌（后删除）。

2014 年 5 月 3 日，添加例 30 密铺四边形㈡。

2014 年 5 月 6 日，添加例 32 月历表。对我来说，这是一次里程碑式的跳跃。我第一次感受到自定义函数的优越性。

2014 年 5 月 7 日，添加例 35 九九乘法表。

2014 年 5 月 14 日，添加例 33 素数表。

2014 年 5 月 16 日，添加例 40 曲边梯形。

2014 年 5 月 17 日，添加例 41 椭圆的弧长。

2014 年 5 月 18 日，更新例 9 勾股树的作法 2。

2014 年 5 月 20 日，添加例 36 双控旋梯（N 边旋），发布“几何画板迭代初步 v2”。

2014 年 5 月 22 日，重写例 2 正五边形㈠、例 6 等差数列㈡、例 7 斐波那契数列。

2014 年 5 月 23 日，添加例 24 回旋线、例 38 正多边形深井。

2014 年 5 月 24 日，修改例 13 密铺四边形㈠，并调整例 25 表格㈠、例 26 表格㈡、例 27 表格㈢的在本书中的顺序。

2014 年 5 月 25 日，方小庆提议把“几何画板迭代初步”更改为“几何画板 由浅入深说迭代”，删除“简单坐标系”案例，重写例 40 曲边梯形、例 41 椭圆的弧长，设计封面和封底，并发布“几何画板 由浅入深说迭代 v1”。

2014 年 5 月 26 日，添加例 10 柯赫曲线的作法 2，修改例 20 Henon Map（埃农映射）、例 21 Mandelbrot sets（曼德布洛特集合）、例 22 Julia Sets（朱丽亚集）、例 23 牛顿迭代法，选编第 3 章的习题。

2014 年 5 月 27 日，添加例 7 斐波那契数列的作法 2；重新编写“迭代的注意事项”。

2014 年 5 月 28 日，添加例 39 旋转点阵；修改旋转和缩放的描述方式。

2014 年 5 月 29 日，添加几何画板中的快捷键方式表。

2014 年 6 月 2 日，更新例 7 斐波那契数列；修改例 39 旋转点阵。

2014 年 6 月 4 日，修改例 32 月历表、例 34 杨辉三角、例 36 双控旋梯（N 边旋）。

2014 年 6 月 6 日，添加例 14 三角点阵。

2014 年 7 月 9 日，修改例 40 曲边梯形、例 41 椭圆的弧长，并发布“几何画板 由浅入深说迭代 v2a”。

2014 年 7 月 13 日，感谢付漾、张清明两位老师指出“几何画板 由浅入深说迭代 v2a”两处错误，修改并发布“几何画板 由浅入深说迭代 v2b”。

2014 年 7 月 14 日，添加例 42 用二分法估算方程的解。感谢赵泰贵老师指出例 14 三角点阵的一处错误，修改并发布“几何画板 由浅入深说迭代 v2c”。

2014 年 7 月 15 日，感谢赵泰贵老师指出例 15 Sierpinski 三角形的一处错误，修改并发布“几何画板 由浅入深说迭代 v2d”。

2014 年 7 月 18 日，修改第 5 章第 1 节中的部分错误，发布“几何画板 由浅入深说迭代 v2e”

审稿：方小庆

修订：唐家军

测试：刘华方

出品：几何画板★研究者(11521676)

〓数学实验室〓(48415029)

感谢：（按姓氏拼音首字母排序）

邓立中　方小庆　方益初　高峻清

何万程　侯仰顺　刘华方　钮炳坤

潘建平　唐家军　谢辅炬　余清海

臧阊运

制版：贺基旭

板友间，心无间……津津乐道！